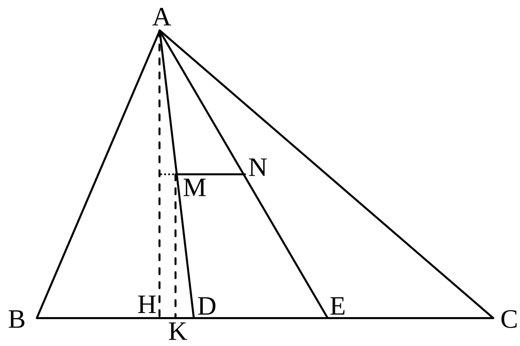
1. Considero il triangolo ABC. Innanzi tutto $\overline{MN} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{MN} \cong \frac{1}{2}\overline{DE}$, perché unendo i punti medi di due lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà, come conseguenza del teorema di Talete.



Perciò l'area del triangolo ABC misura:

$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{AH}$, dove $\overline{AH}$ è l'altezza relativa a $\overline{BC}$.

L'area di DENM, tenuto conto del fatto che, avendo una coppia di lati paralleli, si tratta di un trapezio, si calcola facendo:

$A_{DENM} = \frac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{MN})\cdot\overline{MK}$, dove $\overline{MK}\cong\frac{1}{2}\overline{AH}$,

per il teorema di Talete, $\overline{DE}\cong\frac{1}{3}\overline{BC}$, visto che per ipotesi

$\overline{BD}\cong\overline{DE}\cong\overline{EC}$ e $\overline{MN}\cong\frac{1}{2}\overline{DE}\cong\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{BC}\right)\cong\frac{1}{6}\overline{BC}$.

Perciò l'area del trapezio DENM, facendo le opportune sostituzioni, diventa:

$$A_{DENM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BC}\right)\cdot\frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}\right) = \frac{1}{4}A_{ABC}$$

c.v.d.

Se sappiamo che l'area del trapezio DENM misura $\frac{45}{2}a^2$ e che $\overline{BC}=15a$, possiamo ricavare $\overline{AH}$:

$$\overline{AH} = \frac{8\cdot A_{DENM}}{\overline{BC}} = \frac{8\cdot\frac{45}{2}a^2}{15\,a} = 12a$$

Perché DENM sia un trapezio rettangolo, $D\equiv H$. Non resta quindi che verificare la lunghezza di $\overline{AH}$ usando il teorema di Pitagora e sapendo che $\overline{BH}=5a$, visto che per ipotesi $\overline{BD}\cong\overline{DE}\cong\overline{EC}$:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2} = \sqrt{(13a)^2-(5a)^2} = \sqrt{169a^2-25a^2} = \sqrt{144a^2} = 12a$$

Che corrisponde alla misura di $\overline{AH}$ trovata in precedenza dalla misura dell'area.

c.v.d.

2. $\frac{x^2+2}{x^3+2}\geq 0$ $\qquad N\geq 0:\quad x^2+2\geq 0 \qquad \forall x\in R$

$D>0:\quad x^3+2>0 \qquad x>-\sqrt[3]{2}$

Perciò $y>0$ se $x>-\sqrt[3]{2}$ e, viceversa, $y<0$ se $x<-\sqrt[3]{2}$

3. Si sa che: $Q(x)\cdot d(x)+R(x)=D(x)$, dove $Q(x)=x$ è il quoziente, $d(x)=x^2-1$ è il divisore e $R(x)=x$ è il resto della divisione, perciò, possiamo determinare il dividendo:

$$y=f(x)=D(x)=x(x^2-1)+x=x^3-x+x=x^3$$

4. Trattandosi di un triangolo rettangolo, lo possiamo inscrivere in una semicirconferenza e la sua ipotenusa $\overline{BC}$ va a coincidere con il diametro, il cui punto medio è il centro della circonferenza. Perciò la mediana relativa all'ipotenusa coincide con il raggio, ovvero con metà diametro, ovvero è congruente a metà ipotenusa.

   Se supponiamo poi che l'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{AH} = h$ e l'ipotenusa stessa $\overline{BC} = 2r$ siano note, possiamo determinare la lunghezza dei cateti, applicando il secondo teorema di Euclide, per il quale: $\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HC}$, dove $\overline{BH}$ è la proiezione del cateto $\overline{AB}$ sull'ipotenusa e $\overline{HC}$ quella di $\overline{AC}$.

   Perciò: $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$, dove $\overline{BH} = x$ e, risolvendo l'equazione $h^2 = 2rx - x^2$ si ottiene:

$$x_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - h^2}$$

   Ovvero: $\overline{BH} = r + \sqrt{r^2 - h^2}$ e $\overline{HC} = r - \sqrt{r^2 - h^2}$ o viceversa.
   Applicando il primo teorema di Euclide, posso determinare i due cateti, che sono:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{2r\left(r + \sqrt{r^2 - h^2}\right)}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - h^2}\right)}$$

5. Siccome, per ipotesi, $a + b = a \cdot b$, pongo questi valori uguali ad un certo *k*. A questo punto, si possono determinare *a* e *b*, in quanto sono due numeri dei quali conosciamo somma e prodotto. Risolvo quindi l'equazione di secondo grado: $x^2 - sx + p = 0$, dove *s* e *p* sono somma e prodotto dei due numeri da determinare, perciò:

$$x^2 - kx + k = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$$

   E, dato che l'argomento della radice deve essere non negativo, si possono determinare i numeri reali richiesti sostituendo un qualsiasi valore di *k* alla formula, purché: $k \le 0 \vee k \ge 4$.