INSIEMI E LOGICA

1. Siano dati i predicati in ℕ: $a(x)$: x è un multiplo di 5; $b(x)$: $x < 15$. Determina i valori di verità dei seguenti predicati per i valori di x indicati:

	per $x = 1$	per $x = 10$	per $x = 20$	per $x = 29$
$a(x) \wedge b(x)$	**F**	**V**	**F**	**F**
$a(x) \vee b(x)$	**V**	**V**	**V**	**F**
$\overline{a(x)} \vee \overline{b(x)}$	**V**	**F**	**V**	**V**
$\overline{a(x)} \wedge \overline{b(x)}$	**F**	**F**	**F**	**V**

2. Dato il predicato $a(x)$: $3x < 11$, $x \in N$, determinane l'insieme di verità:

A = { 0; 1; 2; 3 }

3. Scrivi nel linguaggio dei predicati le seguenti proposizioni:
   a. Certi numeri razionali sono maggiori di 5 $\exists\, x \in Q \mid x > 5$
   b. Certi numeri interi non sono divisibili per 5 $\exists\, x \in Z \mid x \neq 5n,\ n \in N$

SCOMPOSIZIONI DI POLINOMI

Esegui le seguenti scomposizioni indicate con una crocetta:

- $a^{12} - 3a^8 b^2 + 3a^4 b^4 - b^6 = (a^2 - b)^3 (a^2 + b)^3$
- $125a^3 - 8 = (5a - 2)(25a^2 + 10a + 4)$
- $a^4 - 17a^2 + 16 = (a - 4)(a + 4)(a - 1)(a + 1)$
- $a^6 + 7a^3 - 8 = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$
- $(a + c)^2 - 4(a + c) = (a + c)(a + c - 4)$
- $3ax + 3x + 2ay + 2y = (3x + 2y)(a + 1)$
- $(2a + c)^2 - (a - c)^2 = 3a(a + 2c)$
- $a^2 - 16a + 63 = (a - 7)(a - 9)$
- $5xy + 12xy^3 - x = x(5y + 12y^3 - 1)$
- $(2a - 3)b^5 - (2a - 3)b^3 + (2a - 3)b = b(2a - 3)(b^4 - b^2 + 1)$
- $625a^8 - 49y^4 = (25a^4 - 7y^2)(25a^4 + 7y^2)$
- $x^2 + 13xy + 42y^2 = (x + 6y)(x + 7y)$
- $a^2 - 5ac - 14c^2 = (a - 7c)(a + 2c)$
- $x^{4m} - 6x^{2m}y + 9y^2 - 5^{6a} = (x^{2m} - 3y - 5^{3a})(x^{2m} - 3y + 5^{3a})$
- $a^{7n} + a^{6n}b^c + a^{6n}b^2 - a^n b^c - b^{2c} - b^{2+c} = (a^n + b^c + b^2)(a^{6n} - b^c)$
- $4x^5 - 36x^3y^2 = 4x^3(x - 3y)(x + 3y)$

- $a^x b^{7y} - b^{6y} = b^{6y}(a^x b^y - 1)$
- $5x^3 y^2 b - 7xyc + 4x^3 d = x(5x^2 y^2 b - 7yc + 4x^2 d)$
- $c^{4n} - 4c^{2n} b^x + 4b^{2x} = (c^{2n} - 2b^x)^2$
- $16a^3 - 40a^2 b + 25ab^2 = a(4a - 5b)^2$
- $(a+5b)^3 - 3(a+5b)^2(2a-b) + 3(a+5b)(2a-b)^2 - (2a-b)^3 =$ $[(a+5b)-(2a-b)]^3 = (6b-a)^3$
- $4x^2 yz^3 - 8xyz^2 + 16xyz^3 = 4xyz^2(xz - 2 + 4z)$
- $k^{6m} - 81y^{2x} = (k^{3m} - 9y^x)(k^{3m} + 9y^x)$
- $x^{2a+b} y^{3+c} - x^a y^c + x^{a+3b} y^{2c} = x^a y^c (x^{a+b} y^3 - 1 + x^{3b} y^c)$
- $(a-3b)(a+2b) - (a+3b)(a-3b) + (a-3b)(2a+4b) = (a-3b)(2a+3b)$
- $x^5 b - 10x^4 bc + 25x^3 bc^2 = x^3 b(x - 5c)^2$
- $a^6 + \frac{4}{25}a^4 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{4}{5}a^5 + a^3 b - \frac{2}{5}a^2 b = \left(a^3 - \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2}b\right)^2$
- $36x^{2n} - (3x^n + 2)^2 = (3x^n - 2)(9x^n + 2)$
- $(2x+y)^2 - (x-y)^2 = 3x(x+2y)$
- $\frac{25}{3}a^3 - 20a^2 xy + 12ax^2 y^2 = \frac{1}{3}a(5a - 6xy)^2$

---

1. Determina il resto della seguente divisione, senza eseguire i calcoli:

$$[(2x-3)(3x^2-5x)(x+1) + (4x^2-6)^2(x-2)] : (x-1)$$

$$R = A(1) = (2-3)(3-5)(1+1) + (4-6)^2(1-2) = 0$$

2. Esegui la seguente espressione con le frazioni algebriche:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+3}{2-x} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\right) : \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} - x\right) + 1 =$$

$$= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\right) : \frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1} + 1 =$$

$$= \frac{x^2-x-2-x^2-2x+3+2x+1}{(x-1)(x-2)} \cdot \frac{x-1}{1} + 1 =$$

$$= \frac{-x+2}{x-2} + 1 = \frac{-(x-2)}{x-2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$c.e.: x \neq 1 \wedge x \neq 2$

Svolgi le seguenti equazioni:

3. $$9+\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-6\right]+6\,\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$$9+\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-x^2-3x-\frac{9}{4}-6\right)+6\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=3$$

$$9-6x-6+12x-6=3 \qquad \boxed{x=1}$$

4. $$\frac{5}{x^2+5x+6}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{3}{9-x^2}=0$$

$$\frac{5}{(x+2)(x+3)}-\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{3}{(3-x)(3+x)}=0$$

$$c.a.:\ x\neq \pm 2 \ \wedge\ x\neq \pm 3$$

$$\frac{5(3-x)(x-2)-2(x+3)(3-x)+3(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)(3-x)(x-2)}=0$$

$$25x-5x^2-30-18+2x^2+3x^2-12=0 \qquad \boxed{x=\frac{12}{5}}$$

5. $$1-\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2x^2-5}{x^2-3x+2}$$

$$1-\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2x^2-5}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x^2-3x+2-x+2+x^2-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2x^2-5}{(x-1)(x-2)}$$

$$c.a.:\ x\neq 2 \ \wedge\ x\neq 1$$

$$x=2 \qquad \textit{non accettabile per le c.a.} \ \Rightarrow \ \boxed{\textit{equazione impossibile}}$$

6. $$2+x(a-3)+x(a+3)-(2a-x)^2=-x^2+4ax+2$$

$$2+ax-3x+ax+3x-4a^2+4ax-x^2=-x^2+4ax+2$$

$$2ax=4a^2 \qquad \boxed{\begin{array}{l}\textit{Se } a=0:\ \textit{eq.ne ind.}\\ \textit{Se } a\neq 0:\ x=2a\end{array}}$$

7. Calcola le misure dei lati di un rettangolo sapendo che il minore di essi è $\frac{7}{12}$ dell'altro e che il perimetro del rettangolo è di m 114.

Sia dato il rettangolo ABCD: se il lato $AB=x$, allora $AD=\frac{7}{12}x$, perciò, essendo il perimetro 114:

$$2x+2\cdot\frac{7}{12}x=114$$

e… risolvendo: $x=36$ e le due dimensioni del rettangolo sono: $\boxed{AD=21m \quad AB=36m}$

8. Risolvi il seguente sistema con il metodo che ritiene più opportuno: $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{y+1} = 3 \\ \dfrac{2y-3}{x+\frac{2}{3}} = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3}{y+1} = \dfrac{3y+3}{y+1} \\ \dfrac{2y-3}{x+\frac{2}{3}} = \dfrac{3x+2}{x+\frac{2}{3}} \end{cases} \qquad c.a.: \; x \neq -\frac{2}{3} \wedge y \neq -1$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

Applico il metodo di eliminazione o riduzione:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 6x - 4y = -10 \end{cases} \\ \hline 5y = -10 \end{array} \Rightarrow y = -2 \qquad \begin{array}{r} \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 9x - 6y = -15 \end{cases} \\ \hline -5x \qquad = 15 \end{array} \Rightarrow x = -3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

9. Stabilisci per quale valore dei parametri a e b il seguente sistema risulta indeterminato: $\begin{cases} ax + y = 3b \\ x - y = 1 \end{cases}$

Se $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{-1} = \dfrac{3b}{1}$, il sistema risulta indeterminato. Dalla relazione si ricava il sistema:

$$\begin{cases} a = -1 \\ 3b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$