1. Trova per quale valore di k il punto $C\,(-2+k;\,2k+3)$ forma con il segmento di estremi A (3; – 2) e B (4; 1) un triangolo isoscele.

Perché il triangolo ABC sia isoscele sulla base $\overline{AB}$, il vertice C deve appartenere all'asse del segmento AB: determino quindi innanzi tutto l'equazione dell'asse del segmento $\overline{AB}$, ricordando che l'asse di un segmento $\overline{AB}$ è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi A e B:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=x^2-8x+16+y^2-2y+1$$

$$x+3y-2=0$$

Sapendo che il generico punto C appartiene all'asse del segmento, so che le sue coordinate soddisfano l'equazione appena trovata, perciò sostituisco le generiche coordinate di C nell'equazione dell'asse, per determinare k:

$$-2+k+3\,(2k+3)-2=0 \qquad k=-\frac{5}{7}$$

2. Scrivi l'equazione della retta *r* passante per A (2; – 1) e B (3; – 2), vertici della base maggiore di un trapezio. Se la base minore ha come estremo il punto C (2; 3) determina l'equazione della base minore *s* e dell'altezza *h* del trapezio passante per C.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta *r*, conoscendo i due punti per cui passa, secondo la formula:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{-2+1} \qquad r:\;\; y=-x+1$$

Posso determinare l'equazione della retta *s*, sapendo che è parallela a *r* (in un trapezio le due basi sono parallele), ovvero ha lo stesso coefficiente angolare e che passa per C:

$$y-y_C=m_r\,(x-x_C)$$

$$y-3=-1\,(x-2) \qquad s:\;\; y=-x+5$$

Posso determinare l'equazione della retta *t*, sapendo che è perpendicolare a *r* (in quanto altezza del trapezio), ovvero ha come coefficiente angolare l'antireciproco del coefficiente angolare di *r*, e che passa per C:

$$y-y_C=-\frac{1}{m_r}\,(x-x_C)$$

$$y-3=1\,(x-2) \qquad t:\;\; y=x+1$$

3. Determina per quale valore di *k* la retta di equazione $(k+3)\,x+(k-1)\,y-k=0$ con $k\in R$ risulta:

   a) parallela all'asse x;

   b) parallela all'asse y;

   c) passante per il punto A (3; – 2);

   d) parallela alla retta $y=2x$.

a) Perché la retta sia parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di *x* nullo: $k+3=0$ $\quad k=-3$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di *y* nullo: $k-1=0$ $\quad k=1$

c) Perché la retta passi per il punto A (3; – 2), sostituisco le coordinate del punto nell'equazione della generica retta per determinare il valore di k: $(k+3)\cdot 3+(k-1)\cdot(-2)-k=0$ $\quad imp.$

d) Perché la retta sia parallela alla retta $y=2x$, deve avere lo stesso coefficiente angolare, perciò pongo il coefficiente angolare della retta generica uguale a 2:

$$-\frac{k+3}{k-1}=2 \qquad k+3=-2k+2 \qquad k=-\frac{1}{3}$$

4. Verifica che nel triangolo ABC di vertici A (5; 3), B (– 1; 7) e C (– 4; – 2) la distanza tra il punto D $\left(\frac{9}{11};\frac{8}{11}\right)$ e il circocentro (punto d'incontro degli assi) H del triangolo è pari a $\sqrt{2}$.

Calcolo l'asse del lato $\overline{AB}$:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$
$$(x-5)^2+(y-3)^2=(x+1)^2+(y-7)^2$$
$$x^2-10x+25+y^2-6y+9=x^2+2x+1+y^2-14y+49$$
$$r:\ 3x-2y+4=0$$

Analogamente, calcolo l'asse del segmento $\overline{BC}$:

$$(x+1)^2+(y-7)^2=(x+4)^2+(y+2)^2$$
$$x^2+2x+1+y^2-14y+49=x^2+8x+16+y^2+4y+4$$
$$s:\ x+3y-5=0$$

Per determinare le coordinate dell'ortocentro H, calcolo l'intersezione tra le rette r e s:

$$\begin{cases}3x-2y+4=0\\ x+3y-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\,(5-3y)-2y+4=0\\ x=-3y+5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{11}\\ y=\dfrac{19}{11}\end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{11};\frac{19}{11}\right)$$

Non mi resta che calcolare la distanza tra D e H e verificare che è uguale a $\sqrt{2}$:

$$\overline{DH}=\sqrt{(x_D-x_H)^2+(y_D-y_H)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{11}+\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{8}{11}-\frac{19}{11}\right)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$ c.v.d.