

1. Trova per quale valore di  $k$  il punto  $P(4k; -3)$  appartiene all'asse del segmento di estremi  $A(-1; 5)$  e  $B(0; 6)$ .

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse del segmento  $\overline{AB}$ , ricordando che l'asse di un segmento  $\overline{AB}$  è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi A e B:

$$\begin{aligned}(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\(x + 1)^2 + (y - 5)^2 &= (x - 0)^2 + (y - 6)^2 \\x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 + y^2 - 12y + 36 \\x + y - 5 &= 0\end{aligned}$$

Sapendo che il generico punto P appartiene all'asse del segmento, so che le sue coordinate soddisfano l'equazione appena trovata, perciò sostituisco le generiche coordinate di P nell'equazione dell'asse, per determinare k:

$$4k - 3 - 5 = 0 \quad k = 2$$

2. Scrivi l'equazione della retta  $r$  passante per  $A(0; 1)$  e  $B(-1; 2)$ . Determina l'equazione della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $C(3; 2)$  e della retta  $t$  perpendicolare a  $r$  e passante per  $D(1; 1)$ .

Determino innanzi tutto l'equazione della retta  $r$ , conoscendo i due punti per cui passa, secondo la formula:

$$\begin{aligned}\frac{x - x_A}{x_B - x_A} &= \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \\ \frac{x - 0}{-1 - 0} &= \frac{y - 1}{2 - 1} \quad r: y = -x + 1\end{aligned}$$

Posso determinare l'equazione della retta  $s$ , sapendo che è parallela a  $r$ , ovvero ha lo stesso coefficiente angolare e che passa per C:

$$\begin{aligned}y - y_C &= m_r (x - x_C) \\ y - 2 &= -1(x - 3) \quad s: y = -x + 5\end{aligned}$$

Posso determinare l'equazione della retta  $t$ , sapendo che è perpendicolare a  $r$ , ovvero ha come coefficiente angolare l'antireciproco del coefficiente angolare di  $r$ , e che passa per D:

$$\begin{aligned}y - y_D &= -\frac{1}{m_r} (x - x_D) \\ y - 1 &= 1(x - 1) \quad t: y = x\end{aligned}$$

3. Determina per quale valore di  $k$  la retta di equazione  $6x + (k + 2)y - 2k = 0$  con  $k \in \mathbb{R}$  risulta:

- parallela all'asse  $x$ ;
- parallela all'asse  $y$ ;
- passante per l'origine degli assi;
- parallela alla retta  $y = 2x$ .

- Perché la retta sia parallela all'asse  $x$ , deve avere il coefficiente di  $x$  nullo:  $6 = 0$  *imp.*
- Perché la retta sia parallela all'asse  $y$ , deve avere il coefficiente di  $y$  nullo:  $k + 2 = 0$   $k = -2$
- Perché la retta passi per l'origine degli assi, deve avere il termine noto nullo:  $-2k = 0$   $k = 0$
- Perché la retta sia parallela alla retta  $y = 2x$ , deve avere lo stesso coefficiente angolare, perciò pongo il coefficiente angolare della retta generica uguale a 2:

$$-\frac{6}{k+2} = 2 \quad k+2 = -3 \quad \text{background-color: #ADD8E6; padding: 2px; } k = -5$$

4. Verifica che nel triangolo ABC di vertici A (-2; 7), B (-4; -3) e C (5; 3) la distanza tra A e l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze) H è pari a  $\sqrt{13}$ .

Calcolo il coefficiente angolare del lato  $\overline{AC}$ , per poter poi determinare l'equazione della retta  $r$ , altezza relativa ad  $\overline{AC}$ , sapendo che il suo coefficiente angolare è uguale all'antireciproco di quello del lato (essendo ad esso perpendicolare) e che passa per il punto B:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3 - 7}{5 + 2} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad m_r = -\frac{1}{m_{\overline{AC}}} = \frac{7}{4}$$

$$y - y_B = m_r (x - x_B) \quad y + 3 = \frac{7}{4} (x + 4) \quad \Rightarrow \quad r: y = \frac{7}{4} x + 4$$

Analogamente, calcolo il coefficiente angolare del lato  $\overline{AB}$ , per poter poi determinare l'equazione della retta  $s$ , altezza relativa ad  $\overline{AB}$ :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 7}{-4 + 2} = \frac{-10}{-2} = 5 \quad \Rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}} = -\frac{1}{5}$$

$$y - y_C = m_s (x - x_C) \quad y - 3 = -\frac{1}{5} (x - 5) \quad \Rightarrow \quad s: y = -\frac{1}{5} x + 4$$

Per determinare le coordinate dell'ortocentro H, calcolo l'intersezione tra le rette  $r$  e  $s$ :

$$\begin{cases} y = \frac{7}{4} x + 4 \\ y = -\frac{1}{5} x + 4 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{5} x + 4 = \frac{7}{4} x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(0; 4)$$

Non mi resta che calcolare la distanza tra A e H e verificare che è uguale a  $\sqrt{13}$ :

$$\overline{AH} = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{4 + 9} = \text{background-color: #ADD8E6; padding: 2px; } \sqrt{13}$$

c.v.d.