1. Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio di misura $3\sqrt{2}$ e concentrica alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$.

Innanzi tutto determino il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$, sapendo che le coordinate generiche del centro, espresse in funzione dell'equazione, sono $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, perciò: $C\,(0; 3)$.

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ essendo α e β le coordinate del centro appena determinate.

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0}$$

2. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 18 = 0$, verifica che il punto $A\,(1; -5)$ appartiene alla curva e determina il punto A', diametralmente opposto ad A.

Verifico innanzi tutto che il punto A appartenga alla circonferenza sostituendo le sue coordinate nell'equazione della curva:

$$1^2 + (-5)^2 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-5) - 18 = 0$$

Essendo verificata, il punto appartiene alla circonferenza.
Determino il centro della circonferenza sapendo che le coordinate generiche del centro, espresse in funzione dell'equazione, sono

$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, perciò: $C\,(-1; -1)$.

Essendo il punto A' diametralmente opposto rispetto ad A, questo significa che è il simmetrico di A rispetto a C, ovvero che C è il punto medio del segmento AA', perciò:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} = x_C \\ \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = y_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_C - x_A \\ y_{A'} = 2y_C - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2 - 1 \\ y_{A'} = -2 + 5 \end{cases} \qquad \boxed{A'\,(-3; 3)}$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti A (0; – 2), B (1; 0) e D (– 1; 0).

Determino l'asse delle corde AB e BD: facendone l'intersezione determino le coordinate del centro C della circonferenza, visto che l'asse di una qualsiasi corda passa sempre per il centro della circonferenza.

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$ formula per determinare l'equazione dell'asse del segmento AB

Asse di AB: $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2$ $\qquad 2x + 4y + 3 = 0$

Asse di BD: dato che i due punti sono simmetrici rispetto all'origine e appartengono all'asse x, l'asse del segmento è l'asse y.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(0; -\frac{3}{4}\right)$$

Calcolo il raggio come segmento AC: $\qquad r = \overline{AC} = |y_A - y_C| = \frac{5}{4}$

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ essendo α e β le coordinate del centro appena determinate.

$$(x - 0)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3y - 2 = 0$$

4. Determina l'equazione della tangente alla circonferenza $3x^2 + 3y^2 + 16x - 6y - 24 = 0$ passante per il punto A di coordinate (– 3; 5).

Verifico se il punto A appartiene alla circonferenza, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della circonferenza:

$$3 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot 5^2 + 16 \cdot (-3) - 6 \cdot 5 - 24 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \in \gamma$$

Applico la regola dello sdoppiamento:

$$x\, x_0 + y\, y_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

$$3 \cdot (-3)\, x + 3 \cdot 5\, y + 16\, \frac{x - 3}{2} - 6\, \frac{y + 5}{2} - 24 = 0$$

$$x - 12y + 63 = 0$$

Posso procedere diversamente, determinando innanzi tutto il centro della circonferenza. Dapprima, però, devo scrivere la circonferenza in forma canonica: $\qquad x^2 + y^2 + \frac{16}{3}x - 2y - 8 = 0 \qquad C\left(-\frac{8}{3}; 1\right)$

Determino il coefficiente angolare del raggio $\overline{CA}$: $\quad m_{\overline{CA}} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{5 - 1}{-3 + \frac{8}{3}} = -12$, perciò il coefficiente angolare della tangente, antireciproco di quello appena determinato, è $\frac{1}{12}$. Determino quindi la tangente, retta di coefficiente angolare $\frac{1}{12}$ e passante per $A(-3; 5)$: $\qquad y - y_A = \frac{1}{12}(x - x_A) \qquad \Rightarrow \qquad x - 12y + 63 = 0$

5. Determina per quale valore di k la retta $x - 2y + k = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.

Calcolo il raggio e il centro della circonferenza e pongo la distanza del centro dalla generica retta uguale al raggio:

$$C\,(-1;1) \qquad r = \sqrt{1+1+2} = 2 \qquad d\,(C;t) = \frac{|-1-2+k|}{\sqrt{1+4}} = 2$$

$$|-3+k| = 2\sqrt{5} \qquad -3+k = \pm 2\sqrt{5} \qquad \boxed{k_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{5}}$$

Posso procedere diversamente, mettendo a sistema le due equazioni e ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\ x = 2y - k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + k^2 - 4yk + y^2 + 4y - 2k - 2y - 2 = 0$$

$$5y^2 + 2y\,(1-2k) + k^2 - 2k - 2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (1-2k)^2 - 5\,(k^2 - 2k - 2) = 0$$

$$1 + 4k^2 - 4k - 5k^2 + 10k + 10 = 0$$

$$k^2 - 6k - 11 = 0 \qquad k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+11} \qquad \boxed{k_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{5}}$$