

1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (5; 2), B (4; 7), C (1; 4) e D (2; -1) è un parallelogrammo e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  è parallelo alla diagonale  $\overline{AC}$  e congruente alla sua metà.

Per verificare che si tratti di un parallelogrammo, è sufficiente verificare che le diagonali hanno lo stesso punto medio. Determino il punto medio delle due diagonali e verifico che è lo stesso:

$$M_{\overline{AC}} \left( \frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = (3; 3) \qquad M_{\overline{BD}} \left( \frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) = (3; 3)$$

I due punti medi coincidono, perciò si tratta di un parallelogrammo.

Determino i punti medi dei lati  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  e li indico rispettivamente con le lettere N e P:

$$N \left( \frac{5+4}{2}; \frac{2+7}{2} \right) = \left( \frac{9}{2}; \frac{9}{2} \right) \qquad P \left( \frac{4+1}{2}; \frac{7+4}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right)$$

Determino il coefficiente angolare del segmento  $\overline{NP}$  e il coefficiente angolare della diagonale  $\overline{AC}$  e verifico che sono uguali, il che significa che i due segmenti sono paralleli:

$$m_{\overline{NP}} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{\frac{11}{2} - \frac{9}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{9}{2}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-2}{1-5} = -\frac{1}{2}$$

Determino la lunghezza dei due segmenti e verifico che  $\overline{NP} \cong \frac{1}{2} \overline{AC}$ :

$$\overline{NP} = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

In effetti:  $\overline{NP} \cong \frac{1}{2} \overline{AC}$ , perché  $\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}$ .

2. Data la retta di equazione  $2x + (k - 3)y - k + 3 = 0$  con  $k \in R$ , calcola  $k$  in modo che la retta:

- sia parallela all'asse  $x$ ;
- sia parallela all'asse  $y$ ;
- passi per l'origine;
- formi con gli assi cartesiani un triangolo di area  $1/2$ ;
- sia perpendicolare alla retta passante per i punti  $A(3; -2)$  e  $B(7; 2)$

a) Perché la retta sia parallela all'asse  $x$ , deve avere il coefficiente di  $x$  nullo:  $2 = 0 \Rightarrow$  **imp.**

b) Perché la retta sia parallela all'asse  $y$ , deve avere il coefficiente di  $y$  nullo:  $k - 3 = 0 \Rightarrow$   **$k = 3$**

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo:  $-k + 3 = 0 \Rightarrow$   **$k = 3$**

d) Perché formi con gli assi cartesiani un triangolo di area  $1/2$ , devo innanzi tutto determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani:

Determino il punto A, intersezione della retta con l'asse  $x$ :

$$A \begin{cases} 2x + (k - 3)y - k + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = k - 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad A\left(\frac{k - 3}{2}; 0\right)$$

Determino il punto B, intersezione della retta con l'asse  $y$ :

$$B \begin{cases} 2x + (k - 3)y - k + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (k - 3)y = k - 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad B(0; 1)$$

Ora posso determinare la lunghezza dei cateti  $\overline{AO}$  e  $\overline{BO}$ :

$$\overline{AO} = |x_A - x_O| = \left| \frac{k - 3}{2} - 0 \right| = \left| \frac{k - 3}{2} \right| \quad \overline{BO} = |y_B - y_O| = |1 - 0| = 1$$

Perciò pongo l'area uguale a  $1/2$ , ottenendo l'equazione in modulo:

$$\frac{\overline{AO} \cdot \overline{BO}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\left| \frac{k - 3}{2} \right| \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|k - 3|}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow |k - 3| = 2$$

Da cui ottengo le due soluzioni:

$$k - 3 = 2 \Rightarrow \mathbf{k = 5} \quad k - 3 = -2 \Rightarrow \mathbf{k = 1}$$

e) Perché la retta data sia perpendicolare alla retta passante per i punti  $A(3; -2)$  e  $B(7; 2)$ , devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre l'antireciproco di tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{7 - 3} = 1$$

$$\frac{2}{3 - k} = -1 \Rightarrow 3 - k = -2 \Rightarrow \mathbf{k = 5}$$

3. Date le equazioni delle due altezze, uscenti, rispettivamente, da B e da C,  $x + y - 2 = 0$  e  $9x - 3y - 4 = 0$  del triangolo ABC e le coordinate del vertice A (2; 2), scrivi le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo.

Indichiamo la retta  $x + y - 2 = 0$  come retta  $r_1$ , equazione dell'altezza uscente da B. Determinando la perpendicolare a questa retta passante per A, la retta  $r_2$ , individuiamo la retta del lato  $\overline{AC}$ . Essendo perpendicolare a  $r_1$  avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di  $r_1$ , cioè 1:

$$y - y_A = 1(x - x_A)$$

$$y - 2 = 1(x - 2) \quad \boxed{y = x}$$

Analogamente, determino la retta  $s_2$ , come perpendicolare della retta  $s_1$ , quindi con coefficiente angolare  $-\frac{1}{3}$  e passante per A:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2) \quad \boxed{x + 3y - 8 = 0}$$

Abbiamo quindi determinato l'equazione della retta del lato  $\overline{AB}$ .

Per determinare l'equazione dell'ultimo lato, determino innanzi tutto i punti B e C: il primo come intersezione delle rette  $r_1$  e  $s_2$ , il secondo come intersezione delle rette  $r_2$  e  $s_1$ :

$$B: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \\ -2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + 3 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Determino quindi l'equazione della retta passante per i punti B e C:

$$\overline{BC}: \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x + 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{y - 3}{\frac{2}{3} - 3} \Rightarrow \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 3}{-7} \Rightarrow -7x - 7 = 5y - 15$$

$$\boxed{7x + 5y - 8 = 0}$$

