1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (5; 2), B (4; 7), C (1; 4) e D (2; – 1) è un parallelogrammo e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ è parallelo alla diagonale $\overline{AC}$ e congruente alla sua metà.

Per verificare che si tratti di un parallelogrammo, è sufficiente verificare che le diagonali hanno lo stesso punto medio.
Determino il punto medio delle due diagonali e verifico che è lo stesso:

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = (3; 3) \qquad M_{\overline{BD}}\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = (3; 3)$$

I due punti medi coincidono, perciò si tratta di un parallelogrammo.

Determino i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e li indico rispettivamente con le lettere N e P:

$$N\left(\frac{5+4}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right) \qquad P\left(\frac{4+1}{2}; \frac{7+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Determino il coefficiente angolare del segmento $\overline{NP}$ e il coefficiente angolare della diagonale $\overline{AC}$ e verifico che sono uguali, il che significa che i due segmenti sono paralleli:

$$m_{\overline{NP}} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{\frac{11}{2} - \frac{9}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{9}{2}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-2}{1-5} = -\frac{1}{2}$$

Determino la lunghezza dei due segmenti e verifico che $\overline{NP} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$:

$$\overline{NP} = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

In effetti: $\overline{NP} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$, perché $\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}$.

2. Data la retta di equazione $2\,x+(k-3)\,y-k+3=0$ con $k\in R$, calcola k in modo che la retta:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine;
d) formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/2;
e) sia perpendicolare alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2)

a) Perché la retta sia parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo: $2=0 \quad\Rightarrow\quad imp.$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo: $k-3=0 \quad\Rightarrow\quad k=3$

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo: $-k+3=0 \quad\Rightarrow\quad k=3$

d) Perché formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/2, devo innanzi tutto determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani:
Determino il punto A, intersezione della retta con l'asse x:

$$A\begin{cases}2\,x+(k-3)\,y-k+3=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}2\,x=k-3\\ y=0\end{cases} \qquad A\left(\frac{k-3}{2};0\right)$$

Determino il punto B, intersezione della retta con l'asse y:

$$B\begin{cases}2\,x+(k-3)\,y-k+3=0\\ x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}(k-3)\,y=k-3\\ x=0\end{cases} \qquad B\,(0;1)$$

Ora posso determinare la lunghezza dei cateti $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$:

$$\overline{AO}=\left|x_A-x_O\right|=\left|\frac{k-3}{2}-0\right|=\left|\frac{k-3}{2}\right| \qquad \overline{BO}=\left|y_B-y_O\right|=\left|1-0\right|=1$$

Perciò pongo l'area uguale a 1/2, ottenendo l'equazione in modulo:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{2}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left|\frac{k-3}{2}\right|\cdot 1}{2}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left|k-3\right|}{2}=\frac{2}{2} \quad\Rightarrow\quad \left|k-3\right|=2$$

Da cui ottengo le due soluzioni:

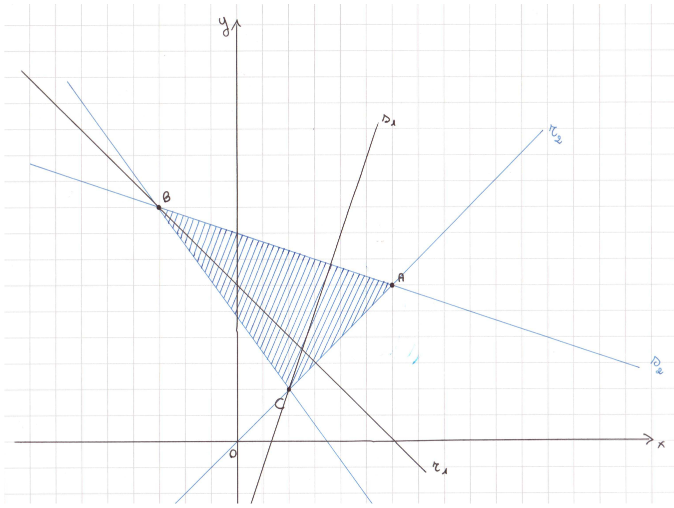
$$k-3=2 \quad\Rightarrow\quad k=5 \qquad\qquad k-3=-2 \quad\Rightarrow\quad k=1$$

e) Perché la retta data sia perpendicolare alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2), devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre l'antireciproco di tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2+2}{7-3}=1$$

$$\frac{2}{3-k}=-1 \quad\Rightarrow\quad 3-k=-2 \quad\Rightarrow\quad k=5$$

3. Date le equazioni delle due altezze, uscenti, rispettivamente, da B e da C, $x + y - 2 = 0$ e $9x - 3y - 4 = 0$ del triangolo ABC e le coordinate del vertice A (2; 2), scrivi le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo.



Indichiamo la retta $x + y - 2 = 0$ come retta r_1, equazione dell'altezza uscente da B. Determinando la perpendicolare a questa retta passante per A, la retta r_2, individuiamo la retta del lato $\overline{AC}$. Essendo perpendicolare a r_1 avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di r_1, cioè 1:

$$y - y_A = 1(x - x_A)$$

$$y - 2 = 1(x - 2) \qquad \boxed{y = x}$$

Analogamente, determino la retta s_2, come perpendicolare della retta s_1, quindi con coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$ e passante per A:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2) \qquad \boxed{x + 3y - 8 = 0}$$

Abbiamo quindi determinato l'equazione della retta del lato $\overline{AB}$.

Per determinare l'equazione dell'ultimo lato, determino innanzi tutto i punti B e C: il primo come intersezione delle rette r_1 e s_2, il secondo come intersezione delle rette r_2 e s_1:

$$\text{B: } \begin{array}{l} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \\ \hline -2y + 6 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 3 \\ x + 3 - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{C: } \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9x - 3x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Determino quindi l'equazione della retta passante per i punti B e C:

$$\overline{BC}: \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{x + 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{y - 3}{\frac{2}{3} - 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 3}{-7} \quad \Rightarrow \quad -7x - 7 = 5y - 15$$

$$\boxed{7x + 5y - 8 = 0}$$