1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (5; 2), B (1; 4), C (– 2; 1) e D (2; – 1) è un parallelogrammo e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ è parallelo alla diagonale $\overline{AC}$ e congruente alla sua metà.

Per verificare che si tratti di un parallelogrammo, è sufficiente verificare che le diagonali hanno lo stesso punto medio.
Determino il punto medio delle due diagonali e verifico che è lo stesso:

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \qquad M_{\overline{BD}}\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

I due punti medi coincidono, perciò si tratta di un parallelogrammo.

Determino i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e li indico rispettivamente con le lettere N e P:

$$N\left(\frac{5+1}{2};\frac{2+4}{2}\right)=(3;3) \qquad P\left(\frac{1-2}{2};\frac{4+1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Determino il coefficiente angolare del segmento $\overline{NP}$ e il coefficiente angolare della diagonale $\overline{AC}$ e verifico che sono uguali, il che significa che i due segmenti sono paralleli:

$$m_{\overline{NP}}=\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}=\frac{\frac{5}{2}-3}{-\frac{1}{2}-3}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{7} \qquad m_{\overline{AC}}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-2}{-2-5}=\frac{1}{7}$$

Determino la lunghezza dei due segmenti e verifico che $\overline{NP}\cong\frac{1}{2}\overline{AC}$:

$$\overline{NP}=\sqrt{(x_P-x_N)^2+(y_P-y_N)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(\frac{5}{2}-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{50}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-2-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

In effetti: $\overline{NP}\cong\frac{1}{2}\overline{AC}$, perché $\frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}$.

2. Data la retta di equazione $(k-3)\,x+2\,y-k+3=0$ con $k\in R$, calcola k in modo che la retta:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine;
d) formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/2;
e) sia perpendicolare alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2)

a) Perché la retta sia parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo: $k-3=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=3}$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo: $2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{imp.}$

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo: $-k+3=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=3}$

d) Perché formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/2, devo innanzi tutto determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani:
Determino il punto A, intersezione della retta con l'asse x:

$$A\begin{cases}(k-3)\,x+2\,y-k+3=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}(k-3)\,x=k-3\\ y=0\end{cases} \qquad A\,(1;0)$$

Determino il punto B, intersezione della retta con l'asse y:

$$B\begin{cases}(k-3)\,x+2\,y-k+3=0\\ x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}2\,y=k-3\\ x=0\end{cases} \qquad B\left(0;\frac{k-3}{2}\right)$$

Ora posso determinare la lunghezza dei cateti $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$:

$$\overline{AO}=\left|x_A-x_O\right|=\left|1-0\right|=1 \qquad \overline{BO}=\left|y_B-y_O\right|=\left|\frac{k-3}{2}-0\right|=\left|\frac{k-3}{2}\right|$$

Perciò pongo l'area uguale a 1/2, ottenendo l'equazione in modulo:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1\cdot\left|\frac{k-3}{2}\right|}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|k-3\right|}{2}=\frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|k-3\right|=2$$

Da cui ottengo le due soluzioni:

$$k-3=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=5} \qquad\qquad k-3=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=1}$$

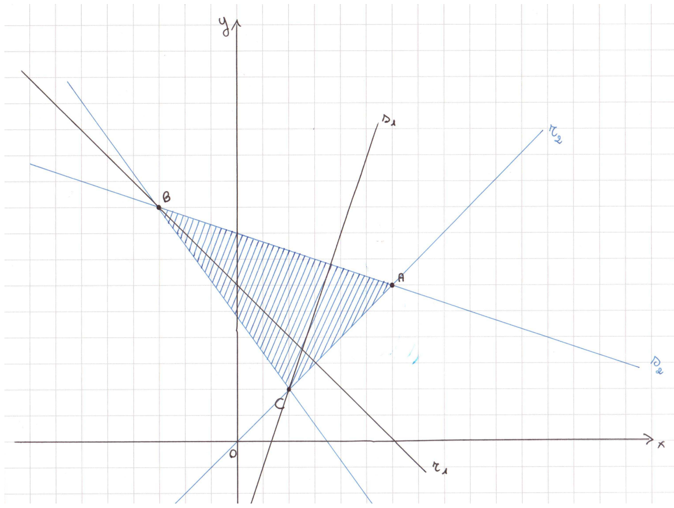
e) Perché la retta data sia perpendicolare alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2), devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre l'antireciproco di tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2+2}{7-3}=1$$

$$\frac{3-k}{2}=-1 \quad \Rightarrow \quad 3-k=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=5}$$

3. Date le equazioni delle due altezze, uscenti, rispettivamente, da B e da C, $x+y-2=0$ e $9x-3y-4=0$ del triangolo ABC e le coordinate del vertice A (2; 2), scrivi le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo.

Indichiamo la retta $x+y-2=0$ come retta r_1, equazione dell'altezza uscente da B. Determinando la perpendicolare a questa retta passante per A, la retta r_2, individuiamo la retta del lato $\overline{AC}$. Essendo perpendicolare a r_1 avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di r_1, cioè 1:



$$y-y_A=1(x-x_A)$$

$$y-2=1(x-2) \qquad \boxed{y=x}$$

Analogamente, determino la retta s_2, come perpendicolare della retta s_1, quindi con coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$ e passante per A:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2) \qquad \boxed{x+3y-8=0}$$

Abbiamo quindi determinato l'equazione della retta del lato $\overline{AB}$.

Per determinare l'equazione dell'ultimo lato, determino innanzi tutto i punti B e C: il primo come intersezione delle rette r_1 e s_2, il secondo come intersezione delle rette r_2 e s_1:

B: $$\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-2=0\\x+3y-8=0\end{cases}\\ \hline -2y+6=0\end{array} \Rightarrow \begin{cases}y=3\\x+3-2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$$

C: $$\begin{cases}9x-3y-4=0\\y=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9x-3x-4=0\\y=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Determino quindi l'equazione della retta passante per i punti B e C:

$$\overline{BC}: \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{y-3}{\frac{2}{3}-3} \Rightarrow \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-7} \Rightarrow -7x-7=5y-15$$

$$\boxed{7x+5y-8=0}$$