1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (– 1; – 1), B (8; 2), C (4; 4) e D (– 2; 2) è un trapezio rettangolo e che il rapporto tra l'area del triangolo ABD e l'area del trapezio è $\frac{3}{5}$.

Per verificare che è un trapezio, basta verificare che ha una coppia di lati congruenti, in questo caso $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Calcolo il coefficiente angolare dei due segmenti: se coincide, sono paralleli.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-2}{-1-8} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3} \qquad m_{\overline{CD}} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{4-2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Si tratta di un trapezio.

Per verificare che è un trapezio rettangolo, calcolo il coefficiente angolare del lato $\overline{AD}$. Se risulta essere l'antireciproco del coefficiente angolare di $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ovvero -3, allora $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, quindi è un trapezio rettangolo:

$$m_{\overline{AD}} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{-1-2}{-1+2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Ho verificato che si tratta di un trapezio rettangolo.

Per calcolare l'area del trapezio ABCD, devo applicare la formula: $A_{ABCD} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}}{2}$

perciò determino la misura dei lati indicati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-8)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{3^2+1} = 3\sqrt{10}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{3^2+1} = 2\sqrt{10}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-1+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Posso calcolare l'area del trapezio e l'area del triangolo rettangolo (avendo verificato che $\overline{AD} \perp \overline{AB}$):

$$A_{ABCD} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{(3\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{5\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 25$$
$$A_{ABD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 15$$

Posso quindi verificare che il rapporto tra l'area del triangolo e quella del trapezio è $\frac{3}{5}$, infatti:

$$\frac{A_{ABD}}{A_{ABCD}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

c.v.d.

2. Data la retta di equazione $(k-2)\,x+(1-k)\,y+3k-6=0$ con $k \in R$, calcola k in modo che la retta:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine;
d) intercetti sull'asse x un segmento di lunghezza 3;
e) sia parallela alla retta passante per i punti A (– 2; 3) e B (7; 2)

a) Perché la retta sia parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo: $k-2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=2}$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo: $1-k=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=1}$

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo: $3k-6=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=2}$

d) Determino innanzi tutto il punto A, intersezione della retta con l'asse x:

$$A\begin{cases}(k-2)\,x+(1-k)\,y+3k-6=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}(k-2)\,x=-3\,(k-2)\\ y=0\end{cases} \qquad A\,(-3;\,0)$$

In questo caso, il segmento intercettato sull'asse x è sempre di lunghezza 3, perciò $\boxed{\forall\, k \neq 2}$

Infatti, nel caso $k=2$ ottengo l'asse x (come si evince dai punti a e c). La generica retta passa sempre per il punto $A\,(-3;\,0)$, essendo il centro del fascio.

e) Perché la retta data sia parallela alla retta passante per i punti A (– 2; 3) e B (7; 2), devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-3}{7+2}=-\frac{1}{9}$$

$$-\frac{k-2}{1-k}=-\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad 9\,(k-2)=1-k \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=\frac{19}{10}}$$

3. La perpendicolare *r* alla retta di equazione $y = 1 - 2x$ e che passa per il punto di intersezione delle rette di equazioni $y - 2x + 3 = 0$ e $3y = x - 9$ interseca gli assi *x* e *y* rispettivamente nei due punti A e B. Trova i punti P della retta AB per i quali si ha che il segmento $\overline{PB}$ è metà del segmento $\overline{AP}$.

Determino innanzi tutto il punto C di intersezione tra le rette $y - 2x + 3 = 0$ e $3y = x - 9$:

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0 \\ 3y = x - 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x + 3 = 0 \\ x = 3y + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 6y - 18 + 3 = 0 \\ x = 3y + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$C\,(0; -3)$$

Sapendo che la retta r è perpendicolare alla retta $y = 1 - 2x$ so che il suo coefficiente angolare è $\frac{1}{2}$, cioè antireciproco del coefficiente angolare della retta data. Sapendo inoltre che r passa per C, posso determinarne l'equazione:

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 0) \qquad r: \quad x - 2y - 6 = 0$$

Determino i punti A e B dati dall'intersezione della retta r con gli assi:

$$A \quad \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\,(6; 0)$$

Per l'intersezione con l'asse y non è necessario svolgere il sistema, perché il punto B coincide con il punto C precedentemente determinato:

$$B\,(0; -3)$$

Il punto P si trova sulla retta r e è tale per cui: $2\,\overline{PB} \cong \overline{PA}$. Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 2\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 2\sqrt{(2y+6)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(2y+6-6)^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 4[(2y+6)^2 + (y+3)^2] = (2y)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 16y^2 + 96y + 144 + 4y^2 + 24y + 36 = 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 15y^2 + 120y + 180 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y + 6 \\ y^2 + 8y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{1} = \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ -6 \end{array} \right.$$

I punti P che soddisfano le condizioni richieste sono due: $P_1\,(2; -2)$ $\qquad P_2\,(6; -6)$