Nel piano xOy:

a. determina l'equazione della circonferenza avente per centro il punto C (2; 2) e tangente alla retta r: y = x + 4;
b. detto A l'ulteriore punto (oltre l'origine O degli assi) di intersezione della circonferenza con l'asse x, determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in O alla retta y = – 8x;
c. determina l'equazione della retta t tangente alla parabola e parallela alla retta y = – 2x + 3, indicando con H il punto di tangenza;
d. determina l'equazione della retta s parallela a r che incontra la parabola in due punti M ed N in modo che sia $\overline{MN} = \frac{7}{\sqrt{2}}$;
e. calcola l'area del triangolo MNH.

a. Conoscendo la retta cui è tangente la circonferenza e sapendo che la distanza di una retta tangente dal centro della circonferenza è uguale al raggio, calcolo la distanza del centro C (2; 2) dalla retta:

$$d\,(C;r) = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Applicando la definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso dentro centro, otteniamo l'equazione:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$

b. Metto a sistema l'equazione della circonferenza con quella dell'asse x, per determinare l'ulteriore punto di intersezione A:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,(x - 4) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dal sistema otteniamo l'origine degli assi cartesiani O e il punto $A\,(4;\,0)$.

Per determinare la parabola, considero innanzi tutto il fascio di parabole passanti per l'origine e ivi tangenti alla retta y = – 8x:

$$y = -8x + k\,(x - 0)^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = k\,x^2 - 8x$$

Impongo il passaggio del fascio per il punto A, sostituendo le sue coordinate alle incognite x e y dell'equazione:

$$0 = k \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2$$

Ovvero la parabola che si ottiene, sostituendo il valore di k così determinato nell'equazione del fascio, è:

$$\mathscr{P}:\ y = 2x^2 - 8x$$

c. Considero la generica retta parallela alla retta data, data dall'equazione y = – 2x + q, metto a sistema la sua equazione con l'equazione della parabola e impongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente per determinare il valore del parametro q:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x \\ y = -2\,x + q \end{cases} \Rightarrow\ 2x^2 - 8x = -2\,x + q \ \Rightarrow\ 2x^2 - 6x - q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 + 2q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{9}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t:\ y = -2x - \frac{9}{2}$$

Calcolo le coordinate del punto di tangenza H mettendo a sistema l'equazione della retta e quella della parabola:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x \\ y = -2x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 = 0 \\ y = -2x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \qquad \boxed{H\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{15}{2}\right)}$$

d. La generica equazione della retta s è: $y = x + q$

Metto a sistema la generica equazione della retta con quella della parabola e determino le generiche coordinate di M e N:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x \\ y = x + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x - q = 0 \\ y = x + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 8q}}{4} \\ y_{1,2} = \dfrac{9 + 4q \pm \sqrt{81 + 8q}}{4} \end{cases}$$

Ovvero i due punti sono:

$$M\left(\frac{9 + \sqrt{81 + 8q}}{4}; \frac{9 + 4q + \sqrt{81 + 8q}}{4}\right)$$

$$N\left(\frac{9 - \sqrt{81 + 8q}}{4}; \frac{9 + 4q - \sqrt{81 + 8q}}{4}\right)$$

Calcolo la distanza tra i due punti e la pongo uguale a $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, come indicato dal testo:

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{9 + \sqrt{81 + 8q}}{4} - \frac{9 - \sqrt{81 + 8q}}{4}\right)^2 + \left(\frac{9 + 4q + \sqrt{81 + 8q}}{4} - \frac{9 + 4q - \sqrt{81 + 8q}}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{81 + 8q}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{81 + 8q}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81 + 8q}{2}}$$

Perciò la relazione diventa:

$$\sqrt{\frac{81 + 8q}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{81 + 8q}{2} = \frac{49}{2}$$

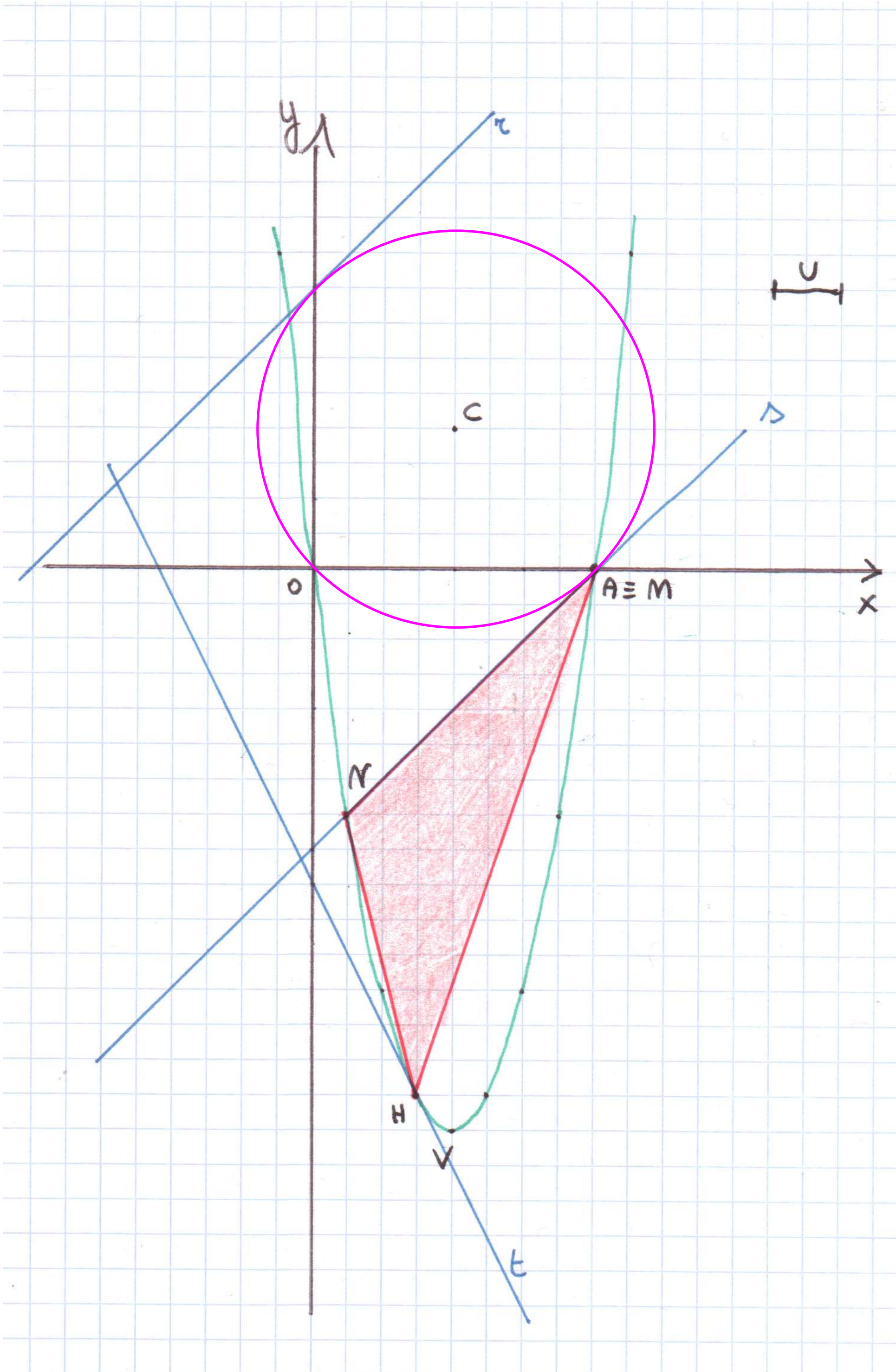
$$8q = -32 \quad \Rightarrow \quad q = -4 \quad acc.$$

L'equazione della retta s è: $\boxed{s: y = x - 4}$

e. Innanzi tutto trovo le coordinate dei punti M e N: $\boxed{M\ (4; 0) \equiv A}$ $\quad \boxed{N\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)}$

Uso la matrice per calcolare l'area del triangolo:

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_N - x_H & x_N - x_M \\ y_N - y_H & y_N - y_M \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -\dfrac{7}{2} \\ 7 & -\dfrac{7}{2} \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(-7 + \frac{49}{2}\right)\right| = \boxed{\frac{35}{4}}$$


y
r
U
C
s
O
A ≡ M
x
N
H
V
t