

1. Dato il fascio di circonferenze: $y = kx^2 + 2x(k - 2) + k - 1$

- a. determina l'equazione delle parabole generatrici;
- b. determina le coordinate del punto base Q;
- c. determina la parabola del fascio passante per l'origine degli assi;
- d. determina la parabola del fascio avente il vertice sulla bisettrice di primo e terzo quadrante;
- e. determina l'equazione della parabola del fascio tangente alla retta $y = 2x - 1$.

a. Per determinare le equazioni delle generatrici, svolgo l'equazione in forma implicita e raccolgo k:

$$kx^2 + 2xk - 4x + k - 1 - y = 0$$

$$k(x^2 + 2x + 1) - 4x - 1 - y = 0$$

$$\mathcal{F}_1: x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad \mathcal{F}_2: y = -4x - 1$$

In entrambi i casi si tratta di parabole degeneri: nel primo caso si può scrivere in forma $(x + 1)^2 = 0$ e ciò significa che la parabola degenera ha equazione $x + 1 = 0$. Nel secondo caso, si tratta della retta tangente alle parabole del fascio. Questo significa che si tratta di un fascio di parabole passanti per un punto e tangenti alla retta $y = -4x - 1$.

b. Il punto base sarà solo uno. Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = -4x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(-1; 3)$$

c. Per determinare l'equazione della parabola del fascio passante per l'origine degli assi, devo porre il termine noto uguale a zero:

$$k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y = x^2 - 2x$$

d. Le generiche coordinate del vertice sono: $V\left(\frac{2-k}{k}; -\frac{(k-2)^2 - k(k-1)}{k}\right) = \left(\frac{2-k}{k}; \frac{3k-4}{k}\right)$

Sostituisco le generiche coordinate nell'equazione della bisettrice di primo e terzo quadrante, $y = x$:

$$\frac{2-k}{k} = \frac{3k-4}{k} \Rightarrow -4k = -6 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Sostituendo il valore di k così ottenuto nell'equazione del fascio, ottengo l'equazione della parabola che soddisfa la condizione richiesta:

$$y = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

e. Per determinare l'equazione della parabola richiesta, metto a sistema l'equazione del fascio di parabole e quella della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = kx^2 + 2x(k - 2) + k - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow kx^2 + 2x(k - 2) + k - 1 = 2x - 1$$

$$kx^2 + 2x(k - 3) + k = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = (k - 3)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 - k^2 = 0$$

Overo: $k = \frac{3}{2}$ che, sostituito nell'equazione del fascio dà: $y = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

2. Scrivi l'equazione della parabola con **asse parallelo all'asse x**, di vertice $V(-9; 4)$ e passante per il punto $(0; 1)$. La retta $y = -x - 3$ incontra la parabola nei punti A e B. Determina:
- la misura del segmento AB;
 - l'area del trapezio rettangolo ABCD, dove C e D sono le proiezioni, rispettivamente, di B e A sull'asse y;
 - rappresenta in un grafico gli oggetti menzionati.

Sapendo che la generica ordinata del vertice di una parabola con asse parallelo all'asse x è $-\frac{b}{2a}$, pongo la generica

coordinata uguale a quella nota. Poi nell'equazione generica della parabola: $x = ay^2 + by + c$ sostituisco le coordinate del punto $(0; 1)$ e del vertice. In questo modo, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 4 \\ -9 = 16a + 4b + c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 0 = a - 8a + c \\ -9 = 16a - 32a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ c = 7a \\ -9 = -16a + 7a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7 \end{cases}$$

L'equazione della parabola richiesta è:

$$x = y^2 - 8y + 7$$

- a. Determino le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x = -y - 3 \\ x = y^2 - 8y + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - 3 = y^2 - 8y + 7 \\ x = -y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y + 10 = 0 \\ x = -y - 3 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 5 \\ x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \quad \boxed{A(-8; 5)} \quad \boxed{B(-5; 2)}$$

Calcolo la distanza tra i due punti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-8 + 5)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

- b. C proiezione di B sull'asse y ha coordinate: $C(0; 2)$. D proiezione di A sull'asse y ha coordinate: $D(0; 5)$

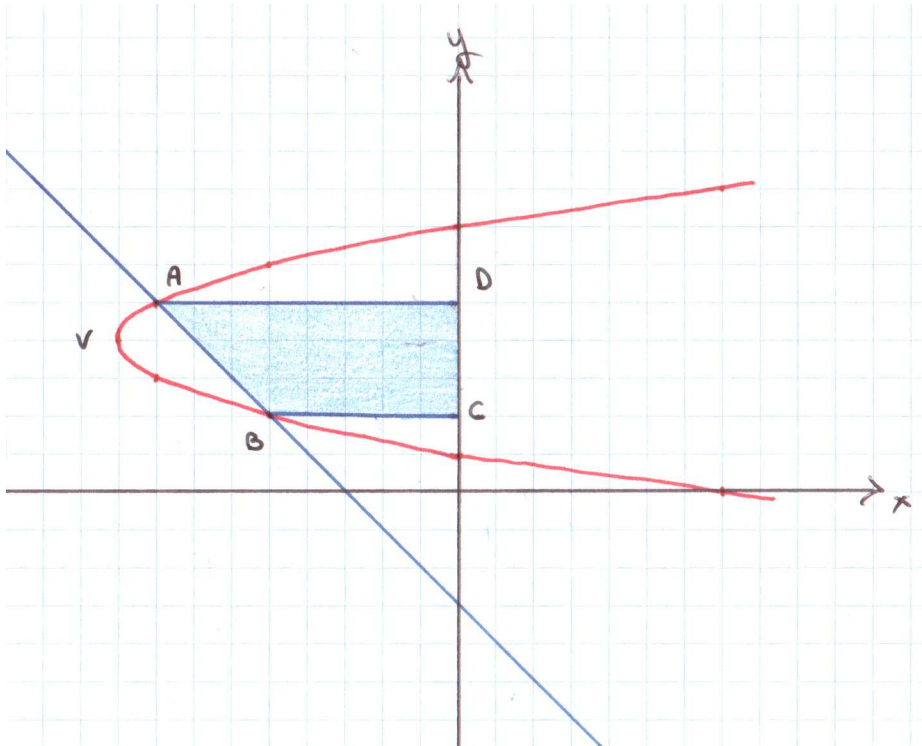
L'area del trapezio rettangolo si calcola come: $A = \frac{(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{CD}}{2}$

Determino la misura dei lati implicati nel calcolo dell'area:

$$\overline{BC} = |x_B - x_C| = 5 \quad \overline{AD} = |x_A - x_D| = 8 \quad \overline{CD} = |y_C - y_D| = 3$$

$$A = \frac{(5 + 8) \cdot 3}{2} = \boxed{\frac{39}{2}}$$

c. Rappresento in un piano cartesiano la parabola, la retta e il trapezio:



3. Determina i coefficienti a , b , c nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, sapendo che essa passa per i punti $A(-2; 9)$, $B(1; 0)$ e che ha come tangente in B la retta perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Determino innanzi tutto l'equazione della tangente, sapendo che è perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x + 2$ e che passa per il punto B :

$$y - 0 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 3$$

Conoscendo l'equazione della tangente e il punto di tangenza, determino l'equazione del fascio di parabole tangenti in B alla retta data:

$$y = 3x - 3 + k(x - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad y = kx^2 + x(3 - 2k) + k - 3$$

Determino quindi l'equazione della parabola passante per il punto A , sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$9 = k \cdot 4 - 2(3 - 2k) + k - 3 \quad \Rightarrow \quad 4k - 6 + 4k + k - 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Sostituendo il valore di k così determinato nell'equazione del fascio, ottengo l'equazione della parabola richiesta:

$$y = 2x^2 - x - 1$$