1. Dato il fascio di circonferenze: $y = k\,x^2 + 2\,x\,(k-2) + k + 1$

   a. determina l'equazione delle parabole generatrici;
   b. determina le coordinate del punto base Q;
   c. determina la parabola del fascio passante per l'origine degli assi;
   d. determina la parabola del fascio avente il vertice sulla bisettrice di primo e terzo quadrante;
   e. determina l'equazione della parabola del fascio tangente alla retta y = 2x + 1.

a. Per determinare le equazioni delle generatrici, svolgo l'equazione in forma implicita e raccolgo k:

$$k\,x^2 + 2\,x\,k - 4\,x + k + 1 - y = 0$$

$$k\,(x^2 + 2\,x + 1) - 4\,x + 1 - y = 0$$

$$\mathscr{P}_1:\ \boxed{x^2 + 2\,x + 1 = 0} \qquad \mathscr{P}_2:\ \boxed{y = -\,4\,x + 1}$$

In entrambi i casi si tratta di parabole degeneri: nel primo caso si può scrivere in forma $(x+1)^2 = 0$ e ciò significa che la parabola degenere ha equazione $x + 1 = 0$. Nel secondo caso, si tratta della retta tangente alle parabole del fascio. Questo significa che si tratta di un fascio di parabole passanti per un punto e tangenti alla retta y = – 4x + 1.

b. Il punto base sarà solo uno. Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = -4\,x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q\,(-1;\,5)}$$

c. Per determinare l'equazione della parabola del fascio passante per l'origine degli assi, devo porre il termine noto uguale a zero:

$$k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -x^2 - 6\,x}$$

d. Le generiche coordinate del vertice sono: $V\left(\dfrac{2-k}{k};\,-\dfrac{(k-2)^2 - k\,(k+1)}{k}\right) = \left(\dfrac{2-k}{k};\,\dfrac{5k-4}{k}\right)$

Sostituisco le generiche coordinate nell'equazione della bisettrice di primo e terzo quadrante, y = x:

$$\frac{2-k}{k} = \frac{5k-4}{k} \quad \Rightarrow \quad -6k = -6 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Sostituendo il valore di k così ottenuto nell'equazione del fascio, ottengo l'equazione della parabola che soddisfa la condizione richiesta:

$$\boxed{y = x^2 - 2\,x + 2}$$

e. Per determinare l'equazione della parabola richiesta, metto a sistema l'equazione del fascio di parabole e quella della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = k\,x^2 + 2\,x\,(k-2) + k + 1 \\ y = 2\,x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k\,x^2 + 2\,x\,(k-2) + k + 1 = 2\,x + 1$$

$$k\,x^2 + 2\,x\,(k-3) + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = (k-3)^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 - k^2 = 0$$

Ovvero: $k = \dfrac{3}{2}$ che, sostituito nell'equazione del fascio dà: $\boxed{y = \dfrac{3}{2}\,x^2 - x + \dfrac{5}{2}}$

2. Scrivi l'equazione della parabola con **asse parallelo all'asse x**, di vertice V (9; 4) e passante per il punto (0; 1). La retta y = x – 3 incontra la parabola nei punti A e B. Determina:
   a. la misura del segmento AB;
   b. l'area del trapezio rettangolo ABCD, dove C e D sono le proiezioni, rispettivamente, di B e A sull'asse y;
   c. rappresenta in un grafico gli oggetti menzionati.

Sapendo che la generica ordinata del vertice di una parabola con asse parallelo all'asse x è $-\frac{b}{2a}$, pongo la generica coordinata uguale a quella nota. Poi nell'equazione generica della parabola: $x = ay^2 + by + c$ sostituisco le coordinate del punto (0; 1) e del vertice. In questo modo, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 4 \\ 9 = 16a + 4b + c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 0 = a - 8a + c \\ 9 = 16a - 32a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ c = 7a \\ 9 = -16a + 7a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}$$

L'equazione della parabola richiesta è: $x = -y^2 + 8y - 7$

a. Determino le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ x = -y^2 + 8y - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3 = -y^2 + 8y - 7 \\ x = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y + 10 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \end{matrix} \right.$$

$A(8; 5)$ $B(5; 2)$

Calcolo la distanza tra i due punti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(8-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

b. C proiezione di B sull'asse y ha coordinate: $C(0; 2)$. D proiezione di A sull'asse y ha coordinate: $D(0; 5)$

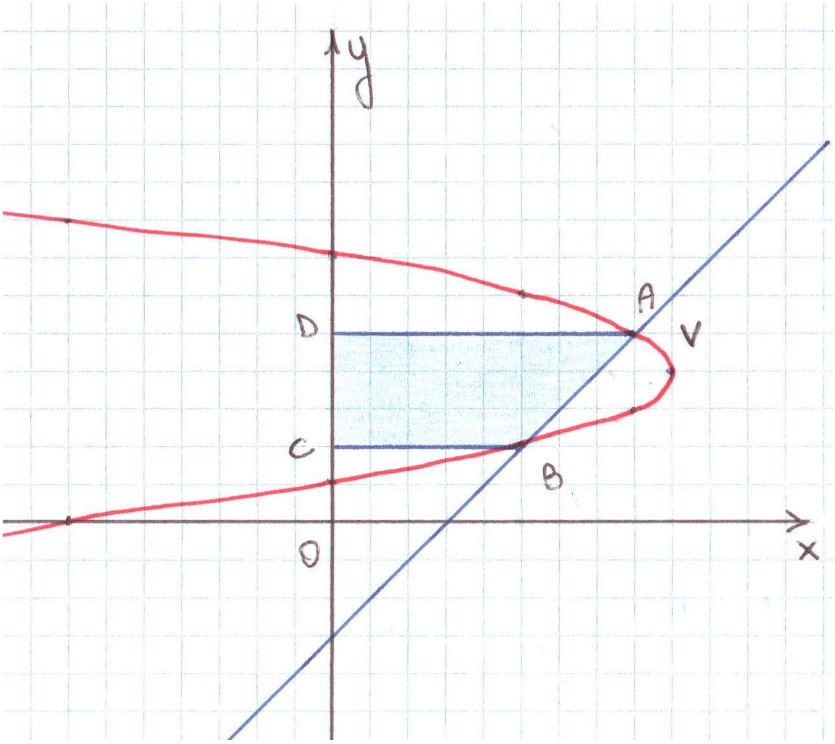
L'area del trapezio rettangolo si calcola come: $A = \frac{(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{CD}}{2}$

Determino la misura dei lati implicati nel calcolo dell'area:

$\overline{BC} = |x_B - x_C| = 5$ $\overline{AD} = |x_A - x_D| = 8$ $\overline{CD} = |y_C - y_D| = 3$

$$A = \frac{(5+8) \cdot 3}{2} = \frac{39}{2}$$

c. Rappresento in un piano cartesiano la parabola, la retta e il trapezio:



3. Determina i coefficienti a, b, c nell'equazione della parabola y = ax^2 + bx + c, sapendo che essa passa per i punti A (–1; 2), B (1; 0) e che ha come tangente in B la retta perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Determino innanzi tutto l'equazione della tangente, sapendo che è perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x + 2$ e che passa per il punto B:

$$y - 0 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 3$$

Conoscendo l'equazione della tangente e il punto di tangenza, determino l'equazione del fascio di parabole tangenti in B alla retta data:

$$y = 3x - 3 + k(x - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad y = kx^2 + x(3 - 2k) + k - 3$$

Determino quindi l'equazione della parabola passante per il punto A, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$2 = k \cdot 1 - 1(3 - 2k) + k - 3 \quad \Rightarrow \quad k - 3 + 2k + k - 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Sostituendo il valore di k così determinato nell'equazione del fascio, ottengo l'equazione della parabola richiesta:

$$\boxed{y = 2x^2 - x - 1}$$