1. Dato il fascio di circonferenze: $x^2 + y^2 + x(k-10) + 3ky - 10k = 0$

   a. determina l'equazione delle circonferenze generatrici;
   b. determina l'equazione dell'asse radicale e dell'asse centrale;
   c. determina le coordinate degli eventuali punti base
   d. determina per quale valore di k la circonferenza del fascio passa per il punto (0; 1);
   e. determina la circonferenza di raggio minimo;
   f. stabilisci per quale valore di k la circonferenza del fascio ha il centro sulla retta x – 3 y + 2 = 0.

a. Per determinare le equazioni delle generatrici, svolgo l'equazione e raccolgo k:

$$x^2 + y^2 + kx - 10x + 3ky - 10k = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + k(x + 3y - 10) = 0$$

$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 10x = 0$ asse radicale a: $x + 3y - 10 = 0$

b. Ho già determinato l'equazione dell'asse radicale che in forma esplicita è: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

So che l'asse centrale è perpendicolare all'asse radicale, perciò ha coefficiente angolare 3, antireciproco del coefficiente angolare dell'asse radicale. Inoltre, passa per i centri delle circonferenze, perciò impongo il passaggio per il centro C_1 della circonferenza generatrice $\mathcal{C}_1$ di coordinate: $C_1(5;0)$.

$$y - y_{C_1} = 3(x - x_{C_1}) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = 3(x-5) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 15$$

c. Per determinare le coordinate degli eventuali punti base, metto a sistema la circonferenza generatrice con l'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9} - 10x = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 10 = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

I punti base del fascio sono $A(10;0)$ e $B(1;3)$

d. Impongo il passaggio per il punto (0; 1), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$0 + 1 + 0 \cdot (k - 10) + 3k - 10k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{7}$$

e. La circonferenza di raggio minimo è la circonferenza che ha per diametro il segmento AB, trattandosi di un fascio di circonferenze secanti. Perciò determino il punto medio del segmento, ovvero il centro della circonferenza richiesta, e la lunghezza del segmento AB, doppio del raggio, dopodiché posso determinare l'equazione della circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso:

$$M_{\overline{AB}}\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right) \qquad r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{9^2 + 3^2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{90}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 11x - 3y + 10 = 0$$

f. Trovo le generiche coordinate del centro in funzione di k:

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{10-k}{2};\frac{-3k}{2}\right)$$

Sostituisco le generiche coordinate nell'equazione della retta data per determinare k:

$$\frac{10-k}{2}-3\,\frac{-3k}{2}+2=0 \qquad \Rightarrow \qquad 10-k+9k+4=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=-\frac{7}{4}$$

2. Dati i punti A (– 7; 3) e B (3; 3) e D (1; – 1):
   a. determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, passante per A, per B e per D. Sia C il suo centro;
   b. verifica che il segmento AB è diametro della circonferenza;
   c. determina le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a $\mathcal{C}$ rispettivamente nei punti A e B;
   d. detti H e K i punti di intersezione tra la retta 3 y + x = 0 e, rispettivamente, t_1 e t_2, verifica che l'area del quadrilatero ABKH è $\frac{70}{3}$;
   e. rappresenta in un grafico gli oggetti menzionati.

a. Sapendo che l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza, determino l'asse s_1 della corda $\overline{AB}$ e l'asse s_2 della corda $\overline{BD}$ e determino la loro intersezione (ovvero le coordinate del centro della circonferenza richiesta) mettendo a sistema le due equazioni:

siccome i due punti A e B hanno la stessa ordinata, l'asse sarà parallelo all'asse y, ovvero avrà equazione: $s_1:\ x=-2$

per quanto riguarda l'asse s_2, utilizzo la definizione di asse come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento:

$$(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=(x-x_D)^2+(y-y_D)^2$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y+1)^2 \qquad\qquad s_2:\ x+2y-4=0$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ x+2y-4=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-2 \\ 2y=6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad C(-2;3)$$

Determino il raggio come distanza del centro dal punto A: $r=\overline{AC}=\left|x_C-x_A\right|=5$

Ecco quindi l'equazione della circonferenza, determinata come luogo geometrico:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2+4x-6y-12=0$$

b. Per verificare che il segmento AB è diametro della circonferenza, ne calcolo la lunghezza e verifico che è uguale al diametro:

$$\overline{AB}=\left|x_A-x_B\right|=10 \qquad c.v.d.$$

c. Le due tangenti sono perpendicolari al raggio passante per il punto di tangenza. Avendo verificato che il segmento AB è diametro della circonferenza e sapendo che è parallelo all'asse x (i due punti hanno la stessa ordinata), le due tangenti saranno parallele all'asse y:

$$t_1:\ x=-7 \qquad\qquad t_2:\ x=3$$

d. Determino le coordinate dei punti H e K:

$$\begin{cases} x = -7 \\ 3y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-7; \frac{7}{3}\right)$$

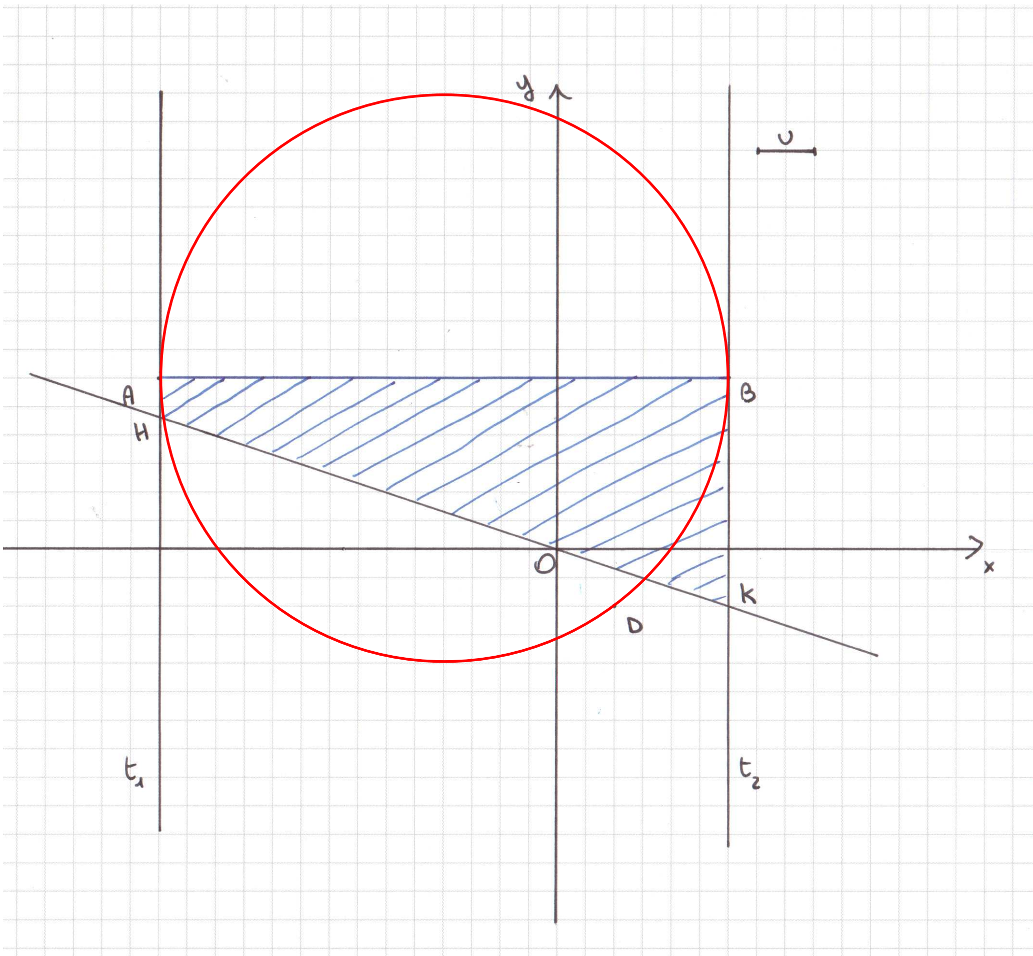
$$\begin{cases} x = 3 \\ 3y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow K\ (3; -1)$$

Siccome il quadrilatero ABKH è un trapezio rettangolo, determino la misura delle basi AH e BK, mentre conosco già la lunghezza dell'altezza AB che è il diametro (10):

$$\overline{AH} = |\, y_A - y_H \,| = \frac{2}{3} \qquad \overline{BK} = |\, y_B - y_K \,| = 4$$

$$A_{ABKH} = \frac{(\overline{AH} + \overline{BK}) \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\left(\dfrac{2}{3} + 4\right) \cdot 10}{2} = \frac{70}{3} \qquad c.v.d.$$

e. Rappresento in un piano cartesiano la circonferenza, le tre rette e il trapezio:



3. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e nella quale è inscritto un triangolo equilatero di perimetro $9\sqrt{3}$.

Siccome il perimetro del triangolo equilatero è $9\sqrt{3}$, il lato del triangolo è $\sqrt{3}$.

L'altezza di un triangolo equilatero è $\frac{3}{2}$ del raggio della circonferenza circoscritta, ma è anche $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$ dove l è il lato del triangolo.

Uguagliando i due risultati, ottengo il raggio della circonferenza:

$$\frac{3}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad r = 1$$

Avendo centro e raggio, posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0}$$