1. Dato il fascio di circonferenze: $x^2 + y^2 + \frac{2(3x - y)(k-1)}{k+2} + \frac{3}{k+2} = 0$

   a. determina l'equazione delle circonferenze generatrici;
   b. determina l'equazione dell'asse radicale e dell'asse centrale;
   c. stabilisci per quale valore di k la circonferenza del fascio passa per il punto (0; 1);
   d. determina l'equazione della circonferenza del fascio passante per l'origine;
   e. stabilisci per quale valore di k la circonferenza del fascio ha il centro sulla retta 2 x + y – 1 = 0.

a. Per determinare le equazioni delle generatrici, svolgo l'equazione e raccolgo k:

$$(k+2)\,x^2 + (k+2)\,y^2 + 6x\,(k-1) - 2y\,(k-1) + 3 = 0$$

$$k\,x^2 + 2x^2 + k\,y^2 + 2y^2 + 6xk - 6x - 2yk + 2y + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 3 + k\,(x^2 + y^2 + 6x - 2y) = 0$$

$\mathcal{C}_1$: $\boxed{x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{3}{2} = 0}$ $\mathcal{C}_2$: $\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0}$

b. Per $k = -2$ nell'equazione lineare posso ottenere l'asse radicale (in questo modo si annullano i coefficienti dei termini di secondo grado):

$$-18\,x + 6y + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{6x - 2y - 1 = 0}$$

So che l'asse centrale è perpendicolare all'asse radicale, perciò ha coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$, antireciproco del coefficiente angolare dell'asse radicale. Inoltre, passa per i centri delle circonferenze, perciò impongo il passaggio per il centro C_2 della circonferenza generatrice $\mathcal{C}_2$ di coordinate: $C_2\,(-3;\,1)$.

$$y - y_{C_2} = -\frac{1}{3}\,(x - x_{C_2}) \qquad \Rightarrow \qquad y - 1 = -\frac{1}{3}\,(x + 3) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x + 3y = 0}$$

c. Impongo il passaggio per il punto (0; 1), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$(k+2)\cdot 0 + (k+2)\cdot 1 + 6\cdot 0\cdot(k-1) - 2\cdot 1\cdot(k-1) + 3 = 0$$

$$k + 2 - 2k + 2 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = 7}$$

d. La circonferenza del fascio passante per l'origine è l'equazione generatrice $\mathcal{C}_2$: $\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0}$

e. Trovo le generiche coordinate del centro in funzione di k:

$$C\left(-\frac{a}{2};\,-\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{-3\,(k-1)}{k+2};\,\frac{k-1}{k+2}\right)$$

Sostituisco le generiche coordinate nell'equazione della retta data per determinare k:

$$2\cdot\frac{-3\,(k-1)}{k+2} + \frac{k-1}{k+2} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -6\,(k-1) + k - 1 - k - 2 = 0$$

$$-6k + 6 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

2. Dati i punti A (4; 0) e B (– 1; 2):
   a. determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, passante per A, per B e per l'origine O. Sia C il suo centro;
   b. determina le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti di intersezione con l'asse *x*;
   c. detto H il punto di intersezione di t_1 e t_2, verifica che l'area del quadrilatero OCAH è 145/18;
   d. rappresenta in un grafico gli oggetti menzionati.

a. Sapendo che l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza, determino l'asse s_1 della corda $\overline{OA}$ e l'asse s_2 della corda $\overline{OB}$ e determino la loro intersezione (ovvero le coordinate del centro della circonferenza richiesta) mettendo a sistema le due equazioni:

siccome i due punti A e O hanno la stessa ordinata, l'asse sarà parallelo all'asse y, ovvero avrà equazione: $s_1:\ x = 2$

per quanto riguarda l'asse s_2, utilizzo la definizione di asse come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento:

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad s_2:\ 2x - 4y + 5 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -4y = -9 \end{cases} \Rightarrow C\left(2;\ \frac{9}{4}\right)$$

Inutile determinare il raggio, visto che la circonferenza passa per l'origine perciò ha equazione generica:

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

e posso determinare a e b a partire dalle coordinate del centro:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} = 2 \\ -\dfrac{b}{2} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 4x - \frac{9}{2}y = 0}$$

b. I punti di intersezione della circonferenza con l'asse x sono i punti A e O dati. Applico la regola dello sdoppiamento per determinare le equazioni delle due tangenti, visto che i punti appartengono alla circonferenza:

$$x x_0 + y y_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

$$0\,x + 0\,y - 4\cdot\frac{x+0}{2} - \frac{9}{2}\cdot\frac{y+0}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{t_1:\ y = -\frac{8}{9}x}$$

$$4x + 0\,y - 4\cdot\frac{x+4}{2} - \frac{9}{2}\cdot\frac{y+0}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{t_2:\ y = \frac{8}{9}x - \frac{32}{9}}$$

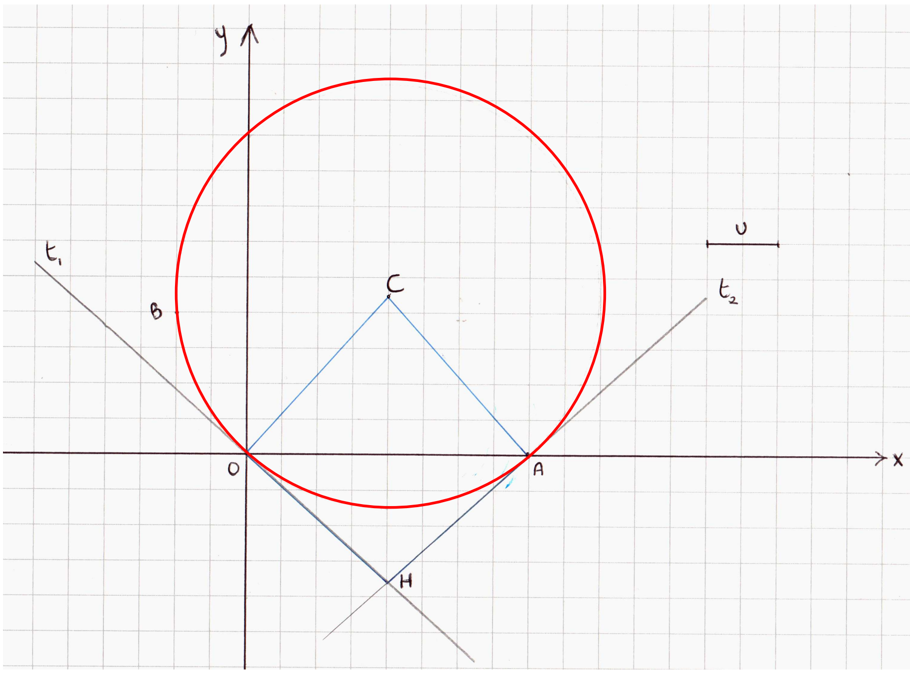
c. Determino il punto di intersezione H delle due tangenti:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{8}{9}x \\ y = \dfrac{8}{9}x - \dfrac{32}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{9}x - \dfrac{32}{9} = -\dfrac{8}{9}x \\ y = -\dfrac{8}{9}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = -x \\ y = -\dfrac{8}{9}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{16}{9} \end{cases}$$

Siccome il quadrilatero OCAH è dato dall'unione di due triangoli OCA e OAH, di base $\overline{OA}$, sommo l'area dei due triangoli:

$$A_{OCAH} = A_{OCA} + A_{OAH} = \frac{\overline{OA}\cdot y_C}{2} + \frac{\overline{OA}\cdot|y_H|}{2} = \frac{4\cdot\frac{9}{4}}{2} + \frac{4\cdot\frac{16}{9}}{2} = \frac{9}{2} + \frac{32}{9} = \frac{81+64}{18} = \frac{145}{18} \quad c.v.d.$$

d. Rappresento in un piano cartesiano la circonferenza e le due rette:



Maturità 2001, problema 1 punto c:

3. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta t: x + y = 4 una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

Calcolo innanzi tutto la distanza del centro dalla retta data:

$$\overline{CH} = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Sapendo che la perpendicolare a una corda passante per il centro interseca la corda nel suo punto medio, se A e B sono i due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza, $\overline{HA} = \sqrt{2}$.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo HAC, posso determinare la lunghezza dell'ipotenusa AC, raggio della circonferenza:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HA}^2 + \overline{CH}^2} = 2$$

Avendo centro e raggio, posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = \overline{AC}^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0}$$