1. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per O (0; 0) e con il centro nel punto di intersezione delle rette $2x+y-7=0$ e $x-y+1=0$.

Determino innanzi tutto il punto di intersezione delle due rette, per trovare il centro della circonferenza:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y-7=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \\ \hline 3x \qquad -6=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \qquad C\,(2;3)$$

Sapendo che l'equazione della circonferenza passante per l'origine degli assi cartesiani ha il termine noto nullo, posso già determinare l'equazione della circonferenza:

$$x^2+y^2-4x-6y=0$$

2. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per il punto $A\,(-6;4)$ e concentrica alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x-2y=0$.

Determino il centro della circonferenza $x^2+y^2+2x-2y=0$, sapendo che le coordinate generiche del centro, espresse in funzione dell'equazione, sono $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$, perciò: $C\,(-1;1)$.

Calcolo il raggio come segmento $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(-6+1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{34}$$

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ essendo α e β le coordinate del centro appena determinate.

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{34})^2 \qquad x^2+y^2+2x-2y-32=0$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $A\,(-2;-2)$ e $B\,(4;1)$.

Determino il centro della circonferenza, punto medio del diametro:

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$$

Calcolo il raggio come segmento $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ essendo α e β le coordinate del centro appena determinate.

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2 \qquad x^2+y^2-2x+y-10=0$$

4. La retta di equazione $x - y + 3 = 0$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$ nei punti A e B. Calcola la misura della corda $\overline{AB}$.

Determino le intersezioni tra retta e circonferenza, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 9 + x^2 + 6x + 2x - x - 3 - 1 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x + 5 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -\dfrac{5}{2} \end{matrix} \right. \Rightarrow A\,(-1;\,2) \quad B\left(-\frac{5}{2};\,\frac{1}{2}\right)$$

Calcolo la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

5. Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nel punto C (2; 2) e raggio $2\sqrt{2}$. Verifica che la retta di equazione $t\colon\ y = x + 4$ è tangente alla circonferenza. Determina le coordinate del punto di tangenza.

Determino l'equazione della circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ essendo α e β le coordinate del centro appena determinate.

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \qquad \boxed{x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0}$$

Per verificare che la retta è tangente alla circonferenza, verifico che $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 8x + 16 - 4x - 4x - 16 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $2x^2 = 0$, per la quale $\Delta = 0$, perciò retta e circonferenza sono tangenti.

Concludendo, il punto di tangenza ha coordinate: $\boxed{(0;\,4)}$