

1. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per  $O(0; 0)$  e con il centro nel punto di intersezione delle rette  $2x - y - 1 = 0$  e  $x + y - 5 = 0$ .

Determino innanzi tutto il punto di intersezione delle due rette, per trovare il centro della circonferenza:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad C(2; 3)$$

Sapendo che l'equazione della circonferenza passante per l'origine degli assi cartesiani ha il termine noto nullo, posso già determinare l'equazione della circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$$

2. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per il punto  $A(4; -2)$  e concentrica alla circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ .

Determino il centro della circonferenza  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ , sapendo che le coordinate generiche del centro, espresse in funzione dell'equazione, sono  $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ , perciò:  $C(-1; 1)$ .

Calcolo il raggio come segmento  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(4 + 1)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{34}$$

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \text{ essendo } \alpha \text{ e } \beta \text{ le coordinate del centro appena determinate.}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{34})^2 \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi  $A(-2; 1)$  e  $B(4; -2)$ .

Determino il centro della circonferenza, punto medio del diametro:

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$$

Calcolo il raggio come segmento  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Determino quindi l'equazione della seconda circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \text{ essendo } \alpha \text{ e } \beta \text{ le coordinate del centro appena determinate.}$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2 \quad x^2 + y^2 - 2x + y - 10 = 0$$

4. La retta di equazione  $x + y = 1$  interseca la circonferenza  $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$  nei punti A e B. Calcola la misura della corda  $\overline{AB}$ .

Determino le intersezioni tra retta e circonferenza, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + x^2 - 2x + 2x - 1 + x - 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2) \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Calcolo la lunghezza del segmento  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

5. Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nel punto C (1; 1) e raggio  $\sqrt{2}$ . Verifica che la retta di equazione  $t: y = x + 2$  è tangente alla circonferenza. Determina le coordinate del punto di tangenza.

Determino l'equazione della circonferenza, di cui conosco centro e raggio, con la formula:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \text{ essendo } \alpha \text{ e } \beta \text{ le coordinate del centro appena determinate.}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

Per verificare che la retta è tangente alla circonferenza, verifico che  $\Delta = 0$  nell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 4x + 4 - 2x - 2x - 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{L'equazione risolvente è } 2x^2 = 0, \text{ per la quale } \Delta = 0, \text{ perciò retta e circonferenza sono tangenti.}$$

Concludendo, il punto di tangenza ha coordinate:

$$(0; 2)$$