1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (2; – 2), B (7; – 3), C (6; 2) e D (1; 3) è un parallelogrammo e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ è parallelo alla diagonale $\overline{AC}$ e congruente alla sua metà.

Per verificare che si tratti di un parallelogrammo, è sufficiente verificare che le diagonali hanno lo stesso punto medio.
Determino il punto medio delle due diagonali e verifico che è lo stesso:

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = (4; 0) \qquad M_{\overline{BD}}\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = (4; 0)$$

I due punti medi coincidono, perciò si tratta di un parallelogrammo.

Determino i punti medi dei lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e li indico rispettivamente con le lettere N e P:

$$N\left(\frac{2+7}{2}; \frac{-2-3}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right) \qquad P\left(\frac{7+6}{2}; \frac{-3+2}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Determino il coefficiente angolare del segmento $\overline{NP}$ e il coefficiente angolare della diagonale $\overline{AC}$ e verifico che sono uguali, il che significa che i due segmenti sono paralleli:

$$m_{\overline{NP}} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{\frac{13}{2} - \frac{9}{2}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2+2}{6-2} = 1$$

Determino la lunghezza dei due segmenti e verifico che $\overline{NP} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$:

$$\overline{NP} = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

In effetti: $\overline{NP} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$, perché $2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2}$.

2. Data la retta di equazione $3\,x+(k-2)\,y-k+2=0$ con $k\in R$, calcola k in modo che la retta:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine;
d) formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/3;
e) sia parallela alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2)

a) Perché la retta sia parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo: $3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{imp.}$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo: $k-2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=2}$

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo: $-k+2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=2}$

d) Perché formi con gli assi cartesiani un triangolo di area 1/3, devo innanzi tutto determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani:
Determino il punto A, intersezione della retta con l'asse x:

$$A\begin{cases}3\,x+(k-2)\,y-k+2=0\\ y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}3\,x=k-2\\ y=0\end{cases}\qquad A\left(\frac{k-2}{3};0\right)$$

Determino il punto B, intersezione della retta con l'asse y:

$$B\begin{cases}3\,x+(k-2)\,y-k+2=0\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}(k-2)\,y=k-2\\ x=0\end{cases}\qquad B\,(0;1)$$

Ora posso determinare la lunghezza dei cateti $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$:

$$\overline{AO}=\left|x_A-x_O\right|=\left|\frac{k-2}{3}-0\right|=\left|\frac{k-2}{3}\right|\qquad\qquad \overline{BO}=\left|y_B-y_O\right|=\left|1-0\right|=1$$

Perciò pongo l'area uguale a 1/3, ottenendo l'equazione in modulo:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{2}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad \frac{\left|\frac{k-2}{3}\right|\cdot 1}{2}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad \frac{\left|k-2\right|}{3}=\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad \left|k-2\right|=2$$

Da cui ottengo le due soluzioni:

$$k-2=2\quad\Rightarrow\quad \boxed{k=4}\qquad\qquad k-2=-2\quad\Rightarrow\quad \boxed{k=0}$$

e) Perché la retta data sia parallela alla retta passante per i punti A (3; – 2) e B (7; 2), devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2+2}{7-3}=1$$

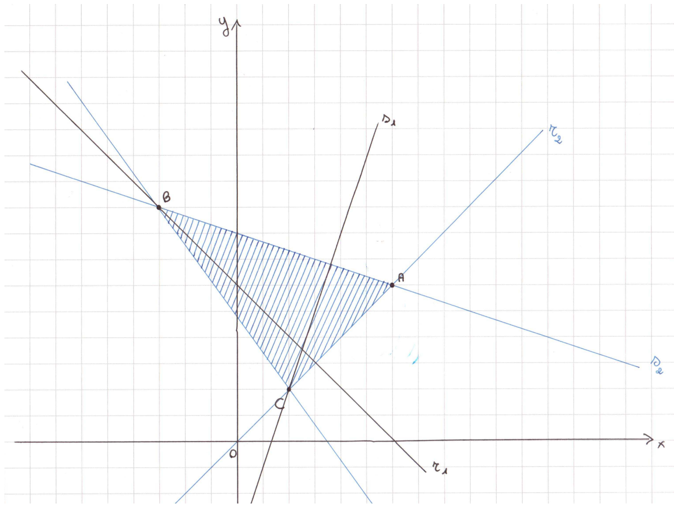
$$\frac{3}{2-k}=1\quad\Rightarrow\quad 2-k=3\quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-1}$$

3. Date le equazioni delle due altezze, uscenti, rispettivamente, da B e da C, $x+y-2=0$ e $9x-3y-4=0$ del triangolo ABC e le coordinate del vertice A (2; 2), scrivi le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo.

Indichiamo la retta $x+y-2=0$ come retta r_1, equazione dell'altezza uscente da B. Determinando la perpendicolare a questa retta passante per A, la retta r_2, individuiamo la retta del lato $\overline{AC}$. Essendo perpendicolare a r_1 avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di r_1, cioè 1:

$$y-y_A=1(x-x_A)$$

$$y-2=1(x-2) \qquad \boxed{y=x}$$



Analogamente, determino la retta s_2, come perpendicolare della retta s_1, quindi con coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$ e passante per A:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2) \qquad \boxed{x+3y-8=0}$$

Abbiamo quindi determinato l'equazione della retta del lato $\overline{AB}$.

Per determinare l'equazione dell'ultimo lato, determino innanzi tutto i punti B e C: il primo come intersezione delle rette r_1 e s_2, il secondo come intersezione delle rette r_2 e s_1:

$$\text{B: } \begin{array}{l} \begin{cases} x+y-2=0 \\ x+3y-8=0 \end{cases} \\ \hline -2y+6=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x+3-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\text{C: } \begin{cases} 9x-3y-4=0 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x-3x-4=0 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Determino quindi l'equazione della retta passante per i punti B e C:

$$\overline{BC}: \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{y-3}{\frac{2}{3}-3} \Rightarrow \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-7} \Rightarrow -7x-7=5y-15$$

$$\boxed{7x+5y-8=0}$$