

1. Verifica che il quadrilatero di vertici A (2; -2), B (6; 2), C (1; 3) e D (-3; -1) è un parallelogrammo e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati \overline{AB} e \overline{BC} è parallelo alla diagonale \overline{AC} e congruente alla sua metà.

Per verificare che si tratti di un parallelogrammo, è sufficiente verificare che le diagonali hanno lo stesso punto medio. Determino il punto medio delle due diagonali e verifico che è lo stesso:

$$M_{\overline{AC}} \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \quad M_{\overline{BD}} \left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

I due punti medi coincidono, perciò si tratta di un parallelogrammo.

Determino i punti medi dei lati \overline{AB} e \overline{BC} e li indico rispettivamente con le lettere N e P:

$$N \left(\frac{2+6}{2}; \frac{-2+2}{2} \right) = (4; 0) \quad P \left(\frac{6+1}{2}; \frac{2+3}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

Determino il coefficiente angolare del segmento \overline{NP} e il coefficiente angolare della diagonale \overline{AC} e verifico che sono uguali, il che significa che i due segmenti sono paralleli:

$$m_{\overline{NP}} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{7}{2} - 4} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5 \quad m_{\overline{AC}} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{7}{2} - 4} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$$

Determino la lunghezza dei due segmenti e verifico che $\overline{NP} \cong \frac{1}{2} \overline{AC}$:

$$\overline{NP} = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{1 + 5^2} = \sqrt{26}$$

In effetti: $\overline{NP} \cong \frac{1}{2} \overline{AC}$, perché $\frac{1}{2} \sqrt{26} = \frac{1}{2} \sqrt{26}$.

2. Data la retta di equazione $(k - 2)x + 3y - k + 2 = 0$ con $k \in R$, calcola k in modo che la retta:

- sia parallela all'asse x ;
- sia parallela all'asse y ;
- passi per l'origine;
- formi con gli assi cartesiani un triangolo di area $1/3$;
- sia parallela alla retta passante per i punti $A(3; -2)$ e $B(7; 2)$

a) Perché la retta sia parallela all'asse x , deve avere il coefficiente di x nullo: $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

b) Perché la retta sia parallela all'asse y , deve avere il coefficiente di y nullo: $3 = 0 \Rightarrow \text{imp.}$

c) Perché la retta passi per l'origine, deve avere il termine noto nullo: $-k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

d) Perché formi con gli assi cartesiani un triangolo di area $1/3$, devo innanzi tutto determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani:

Determino il punto A, intersezione della retta con l'asse x :

$$A \begin{cases} (k - 2)x + 3y - k + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (k - 2)x = k - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(1; 0)$$

Determino il punto B, intersezione della retta con l'asse y :

$$B \begin{cases} (k - 2)x + 3y - k + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = k - 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad B\left(0; \frac{k - 2}{3}\right)$$

Ora posso determinare la lunghezza dei cateti \overline{AO} e \overline{BO} :

$$\overline{AO} = |x_A - x_O| = |1 - 0| = 1 \quad \overline{BO} = |y_B - y_O| = \left| \frac{k - 2}{3} - 0 \right| = \left| \frac{k - 2}{3} \right|$$

Perciò pongo l'area uguale a $1/3$, ottenendo l'equazione in modulo:

$$\frac{\overline{AO} \cdot \overline{BO}}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \cdot \left| \frac{k - 2}{3} \right|}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|k - 2|}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow |k - 2| = 2$$

Da cui ottengo le due soluzioni:

$$k - 2 = 2 \Rightarrow k = 4 \quad k - 2 = -2 \Rightarrow k = 0$$

e) Perché la retta data sia parallela alla retta passante per i punti $A(3; -2)$ e $B(7; 2)$, devo prima determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B e porre tale coefficiente angolare uguale a quello della retta data:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{7 - 3} = 1$$

$$\frac{2 - k}{3} = 1 \Rightarrow 2 - k = 3 \Rightarrow k = -1$$

3. Date le equazioni delle due altezze, uscenti, rispettivamente, da B e da C, $x + y - 2 = 0$ e $9x - 3y - 4 = 0$ del triangolo ABC e le coordinate del vertice A (2; 2), scrivi le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo.

Indichiamo la retta $x + y - 2 = 0$ come retta r_1 , equazione dell'altezza uscente da B. Determinando la perpendicolare a questa retta passante per A, la retta r_2 , individuiamo la retta del lato \overline{AC} . Essendo perpendicolare a r_1 avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di r_1 , cioè 1:

$$y - y_A = 1(x - x_A)$$

$$y - 2 = 1(x - 2) \quad \boxed{y = x}$$

Analogamente, determino la retta s_2 , come perpendicolare della retta s_1 , quindi con coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$ e passante per A:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2) \quad \boxed{x + 3y - 8 = 0}$$

Abbiamo quindi determinato l'equazione della retta del lato \overline{AB} .

Per determinare l'equazione dell'ultimo lato, determino innanzi tutto i punti B e C: il primo come intersezione delle rette r_1 e s_2 , il secondo come intersezione delle rette r_2 e s_1 :

$$B: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \\ -2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + 3 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Determino quindi l'equazione della retta passante per i punti B e C:

$$\overline{BC}: \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x + 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{y - 3}{\frac{2}{3} - 3} \Rightarrow \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 3}{-7} \Rightarrow -7x - 7 = 5y - 15$$

$$\boxed{7x + 5y - 8 = 0}$$

