1. Determina l'equazione dell'ellisse che ha l'asse focale sull'asse x di lunghezza 6 e vertice A (5; 0).

Asse focale di lunghezza 6 significa $c = 3$ e dalle coordinate del vertice abbiamo $a = 5$, posso quindi determinare b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

2. Determina l'equazione dell'ellisse passante per i punti $(4; 0)$ e $\left(3\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right)$ e rappresentala.

Il punto (4; 0) non è un punto qualsiasi dell'ellisse, è un vertice, ovvero: $a = 4$. La seconda condizione la ottengo imponendo il passaggio dell'ellisse per il punto $\left(3\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right)$, ovvero sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} a = 4 \\ \dfrac{18}{a^2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ \dfrac{18}{16} + \dfrac{1}{4\,b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{4\,b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ \dfrac{1}{4\,b^2} = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \qquad \boxed{imp.}$$

Si poteva arrivare alla stessa conclusione osservando che $3\sqrt{2} > 4$, dove il punto (4; 0) è un vertice.

3. Determina l'equazione della tangente all'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ passante per il suo punto di ascissa 1 posto nel primo quadrante.

Determino innanzi tutto le coordinate del punto appartenente all'ellisse, sostituendo l'ascissa 1 nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{16} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{3}$$

Essendo nel primo quadrante, il punto ha coordinate: $(1; 2\sqrt{3})$. Applico la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$\frac{1\,x}{4} + \frac{2\sqrt{3}\,y}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\,x + y\sqrt{3} = 8}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole di vertice (0; 5) e con asse focale pari a 12.

Avendo il vertice in (0; 5): $b = 5$ e l'asse focale è l'asse y (i fuochi si trovano sull'asse y)

Avendo asse focale pari a 12, $c = 6$. Perciò: $a^2 = c^2 - b^2 = 36 - 25 = 11$

L'equazione dell'iperbole è: $\boxed{\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1}$

5. Determina l'equazione delle tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ uscenti dal punto P (0; 1).

Considero la generica retta passante per il punto P (0; 1): $y = mx + 1$. Metto a sistema la retta con l'equazione dell'iperbole e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = mx + 1 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{(mx+1)^2}{3} = 1 \qquad x^2 - 3(m^2x^2 + 1 + 2mx) = 9$$

$$x^2 - 3m^2x^2 - 3 - 6mx = 9 \qquad x^2(1 - 3m^2) - 6mx - 12 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9m^2 + 12(1 - 3m^2) = 0 \qquad 3m^2 + 4 - 12m^2 = 0$$

$$m^2 = \frac{4}{9}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{2}{3}x + 1}$$

6. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera traslata avente centro di simmetria nel punto (2; 3) e passante per l'origine.

L'iperbole equilatera traslata ha equazione: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ma sapendo che passa per il punto $(0; 0)$ l'equazione diventa:

$y = \frac{ax}{cx+d}$ che posso anche scrivere (dividendo numeratore e denominatore per c, come: $y = \frac{\frac{a}{c}x}{x + \frac{d}{c}}$

Il centro di simmetria ha coordinate generiche: $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$, perciò:

$$\boxed{y = \frac{3x}{x-2}}$$