1. Determina l'equazione dell'ellisse che ha il semiasse maggiore lungo 10 e i fuochi con coordinate $(\pm 6;\, 0)$.

$c = 6 \qquad a = 10$, posso quindi determinare b: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

$$\boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1}$$

2. Determina l'equazione dell'ellisse avente fuoco in $F\,(2\sqrt{7};\, 0)$ ed eccentricità $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\begin{cases} c = 2\sqrt{7} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 2\sqrt{7} \\ \frac{2\sqrt{7}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 2\sqrt{7} \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7} \\ a = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = 28 \\ a = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 64 - b^2 = 28 \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 36 \\ a = 8 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1}$$

3. Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina b^2 in modo che risulti tangente alla retta $y = 4 - \sqrt{2}\,x$.

Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con l'equazione della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 4 - \sqrt{2}\,x \end{cases} \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{2x^2 + 16 - 8\sqrt{2}\,x}{b^2} = 1$$

$$b^2 x^2 + 8x^2 + 64 - 32\sqrt{2}\,x - 4b^2 = 0 \qquad (b^2 + 8)\,x^2 - 32\sqrt{2}\,x + 4\,(16 - b^2) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16^2 \cdot 2 - 4\,(16 - b^2)\,(b^2 + 8) = 0$$

$$128 - (16\,b^2 + 128 - b^4 - 8\,b^2) = 0 \qquad 128 - 16\,b^2 - 128 + b^4 + 8\,b^2 = 0$$

$$b^4 - 8\,b^2 = 0 \qquad b^2\,(b^2 - 8) = 0 \qquad \boxed{b^2 = 8}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente i vertici in $(0; \pm 2\sqrt{2})$ e i fuochi in $(0; \pm\sqrt{13})$.

Avendo i vertici in $(0; \pm 2\sqrt{2})$: $b = 2\sqrt{2}$, dato che l'asse focale è l'asse y (i fuochi si trovano sull'asse y)

Avendo i fuochi in $(0; \pm\sqrt{13})$: $c = \sqrt{13}$. Perciò: $a^2 = c^2 - b^2 = 13 - 8 = 5$

L'equazione dell'iperbole è: $\boxed{\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1}$

5. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente come asse focale l'asse x e passante per i punti $(4; -2)$ e $(2\sqrt{2}; 0)$.

La generica equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avendo come asse focale l'asse x.

Sostituisco le coordinate dei punti nella generica equazione e metto a sistema:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{8}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{8}{a^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 8 \\ \frac{16}{8} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 8 \\ -\frac{4}{b^2} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 8 \\ \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1}$$

6. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera traslata avente centro di simmetria nel punto $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ e passante per il punto $(0; 0)$.

L'iperbole equilatera traslata ha equazione: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, ma sapendo che passa per il punto $(0; 0)$ l'equazione diventa:

$y = \frac{ax}{cx + d}$ che posso anche scrivere (dividendo numeratore e denominatore per c, come: $y = \frac{\frac{a}{c}x}{x + \frac{d}{c}}$

Il centro di simmetria ha coordinate generiche: $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$, perciò: $y = \frac{\frac{1}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$

L'equazione dell'iperbole è quindi: $\boxed{y = \frac{x}{3x + 1}}$