

1. A partire dalle seguenti ipotesi e dalla tesi, enunciare in italiano il seguente teorema:

$$\begin{array}{llllll} \text{Ipotesi: } \mathcal{C}, O, r & \mathcal{C}', O', r' & \overline{OO'} \cong r + r' & \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{M\} & M \in t, s & \\ t \cap \mathcal{C} = \{M; A\} & t \cap \mathcal{C}' = \{M; B\} & s \cap \mathcal{C} = \{M; C\} & s \cap \mathcal{C}' = \{M; D\} & & \\ & & & & \text{Tesi: } \overline{AC} \parallel \overline{BD} & \end{array}$$

Siano date due circonferenze tangenti esternamente. Considerate due rette, t e s , passanti per il punto di contatto delle due circonferenze, le corde determinate dagli ulteriori punti di contatto di queste rette con le circonferenze sono parallele.

2. In una circonferenza di diametro AB è inscritto il triangolo ABC tale che sia $\hat{BAC} \cong 60^\circ$. Prolunga il lato \overline{BA} di un segmento $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ e dimostra che:

- il segmento \overline{DC} è parallelo alla bisettrice \overline{AE} dell'angolo \hat{BAC} ;
- il segmento \overline{DC} è tangente in C alla circonferenza;
- il triangolo AOC è equilatero;
- i triangoli DCO e ABC sono congruenti;

Ipotesi: \mathcal{C}, O, r

$$A, B, C \in \mathcal{C} \text{ e } O \in \overline{AB} \quad \hat{BAC} \cong 60^\circ$$

$$D, A, B \text{ allineati} \quad \overline{AD} \cong \overline{AC}$$

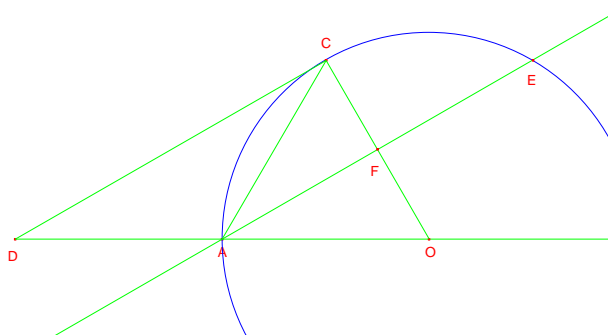
$$E \in \mathcal{C} \text{ e } \hat{CAE} \cong \hat{EAB}$$

TESI: **A.** $\overline{DC} \parallel \overline{AE}$

B. $\overline{DC} \perp \overline{CO}$

C. $\overline{AO} \cong \overline{OC} \cong \overline{AC}$

D. $\triangle DCO \cong \triangle ABC$

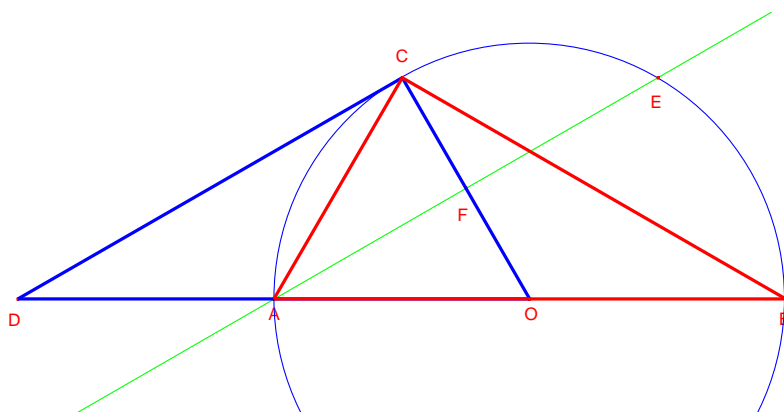
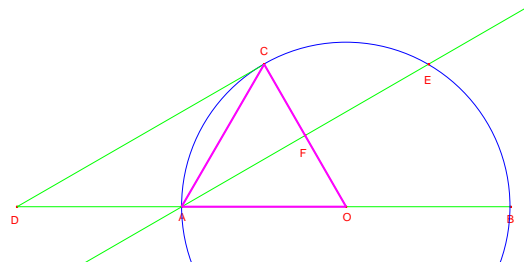


Dimostrazione

A $\hat{BAC} \cong 60^\circ \Rightarrow \hat{CAD} \cong 120^\circ$ dato che D, A, B sono allineati per ipotesi. Il triangolo DAC è isoscele per ipotesi ($\overline{AD} \cong \overline{AC}$) perciò i due angoli alla base sono congruenti: $\hat{ADC} \cong \hat{ACD}$ e, dato che l'angolo al vertice è di 120° per quanto precedentemente detto: $\hat{ADC} \cong \hat{ACD} \cong \frac{180^\circ - \hat{BAC}}{2} \cong \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} \cong 30^\circ$. Essendo per ipotesi $\hat{CAE} \cong \hat{EAB}$, ovvero metà dell'angolo $\hat{BAC} \cong 60^\circ$, abbiamo che $\hat{EAB} \cong 30^\circ$. Ma, considerati i due segmenti \overline{AE} e \overline{DC} tagliati dalla trasversale \overline{DO} , i due angoli $\hat{EAB} \cong \hat{ADC}$ sono angoli corrispondenti e quindi: $\overline{DC} \parallel \overline{AE}$.

B $\hat{COB} \cong 120^\circ$ perché angolo al centro corrispondente all'angolo alla circonferenza $\hat{BAC} \cong 60^\circ$. Di conseguenza, $\hat{COA} \cong 60^\circ$, perché supplementare dell'angolo \hat{COB} . Nel triangolo ODC abbiamo gli angoli: $\hat{COD} \cong 60^\circ$ e $\hat{ODC} \cong 30^\circ$ per quanto detto nel punto A. Essendo la somma degli angoli interni di un triangolo pari a 180° , otteniamo che $\hat{DCO} \cong 90^\circ$, ovvero $\overline{DC} \perp \overline{CO}$.

C Nel triangolo ACO abbiamo già detto che $\widehat{OAC} \cong 60^\circ$ per ipotesi, $\widehat{COA} \cong 60^\circ$ per quanto detto nel punto B, quindi, per differenza, $\widehat{ACO} \cong 60^\circ$. Perciò il triangolo AOC è equilatero e, di conseguenza, $\overline{AO} \cong \overline{OC} \cong \overline{AC}$.



D. I due triangoli DCO e ABC sono rettangoli, il primo per quanto detto nei punti precedenti, il triangolo ABC perché inscritto in una semicirconferenza e con un lato coincidente con il diametro. I due triangoli hanno:

- ✓ $\overline{DO} \cong \overline{AB}$ essendo $\overline{DO} \cong \overline{AD} + \overline{AO}$ e $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ per ipotesi, ma $\overline{AC} \cong \overline{AO}$ per quanto detto nel punto C.
- ✓ $\overline{AC} \cong \overline{CO}$ per quanto dimostrato nel punto C.

I due triangoli sono rettangoli e hanno l'ipotenusa e un cateto congruenti, perciò sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli: $\triangle DCO \cong \triangle ABC$.

c.v.d.

3. Enuncia il teorema dell'angolo al centro.

Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.

4. Che relazione esiste tra il diametro della circonferenza e una qualsiasi altra corda? Enuncia e dimostra il teorema corrispondente.

In ogni circonferenza il diametro è maggiore di qualsiasi altra corda.

Ipotesi: $A, B, C, D \in \mathcal{C}, O \in \overline{AB}$ e $O \notin \overline{CD}$ Tesi: $\overline{AB} > \overline{CD}$

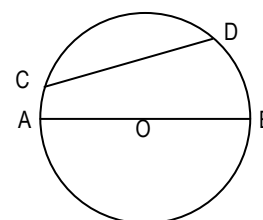
Dimostrazione

Congiungendo gli estremi della corda \overline{CD} con il centro O della circonferenza, si ottiene il triangolo COD. In un qualsiasi triangolo la somma di due lati è sempre maggiore del terzo lato, cioè:

$$\overline{CO} + \overline{OD} > \overline{CD}.$$

Ma \overline{CO} e \overline{OD} sono due raggi per costruzione, perciò $\overline{CO} + \overline{OD} \cong \overline{AB}$.

Di conseguenza: $\overline{AB} > \overline{CD}$.



c.v.d.