

$$1. \quad 3 \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x - 1) - 1 (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x - 1) (3 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$2. \quad 2 \cos^2 x + (2 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}}{4} = \frac{-2 - \sqrt{3} \pm (2 - \sqrt{3})}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2k\pi$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$3. \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 4$$

$$\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) = 4$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 4$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = 4$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \neq 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - 4 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 1}}{1} = \begin{cases} 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$4. \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos 2x - 1}{4}$$

$$\frac{1 + \cos x}{2} - 2 \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\cos x (\cos x - 3) = 0$$

$$1 + \cos x - 2 + 2 \cos x = -1 + \cos^2 x$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$5. \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) - 1 = 0$$

È un'equazione lineare, che risolvo in modo grafico, ponendo: $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) = Y$ e $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) = X$:

$$\begin{cases} X + Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ Y^2 + 1 - 2Y + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases}$$

$$2Y(Y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \\ X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + 6k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} = 2k\pi$$

$$\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + 6k\pi$$

$$6. 3 \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$$

È un'equazione omogenea di secondo grado: divido per $\cos^2 x$, avendo verificato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione:

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$7. \quad 5 \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}^2 x = 2$$

È un'equazione di secondo grado riconducibile a omogenea, moltiplicando 2 per $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$:

$$5 \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}^2 x = 2 (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)$$

$$5 \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$3 \operatorname{sen}^2 x + 2 \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

Divido per $\cos^2 x$, avendo verificato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+9}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \qquad x = \frac{2}{3} \pi + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$8. \quad \operatorname{sen} 4x - \cos 4x = 1$$

È un'equazione lineare che posso risolvere in forma grafica, ponendo $\cos 4x = X$ e $\operatorname{sen} 4x = Y$:

$$\begin{cases} Y - X = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = Y - 1 \\ Y^2 - 2Y + 1 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = Y - 1 \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases}$$

$$2Y(Y - 1) = 0 \qquad \begin{cases} Y = 0 \\ Y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \end{cases} \qquad 4x = \pi + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \qquad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$