1. $4\,sen^2 x \cos^2 x = 1$

$(2\,sen\,x \cos x)^2 = 1$ $\qquad sen^2\,2x = 1$ $\qquad sen\,2x = \pm 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

2. $sen\,x - tg\,x = 0$

$sen\,x - \frac{sen\,x}{\cos x} = 0$ $\qquad \frac{sen\,x}{\cos x}(\cos x - 1) = 0$ $\qquad tg\,x\,(\cos x - 1) = 0$

$tg\,x = 0$ $\qquad x = k\pi$

$\cos x = 1$ $\qquad x = 2k\pi$

$x = k\pi$

3. $3\cos x + 2(\cos^2 x + 2\,sen^2 x) = 2$

$3\cos x + 2(\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x)) = 2$

$3\cos x + 2(\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x) = 2$

$3\cos x + 2(2 - \cos^2 x) = 2$ $\qquad 3\cos x + 4 - 2\cos^2 x = 2$

$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ $\qquad \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$\cos x = 2$ $\qquad$ *imp.*

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\qquad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ $\qquad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

4. $sen\,x\,(2\,sen\,x + 1) = 1$

$2\,sen^2 x + sen\,x - 1 = 0$ $\qquad sen\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix} \right.$

$sen\,x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $\qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$sen\,x = -1$ $\qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

5. $(2\,tg\,x+\sqrt{3})^2=3$

$2\,tg\,x+\sqrt{3}=\pm\sqrt{3}$

$2\,tg\,x+\sqrt{3}=\sqrt{3}$ $\qquad tg\,x=0$ $\qquad x=k\pi$

$2\,tg\,x+\sqrt{3}=-\sqrt{3}$ $\qquad tg\,x=-\sqrt{3}$ $\qquad x=\frac{2}{3}\pi+k\pi$

6. $\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos(\pi-x)$

$\cos x\cos\frac{2}{3}\pi-sen\,x\;sen\frac{2}{3}\pi=-\cos x$

$-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,x=-\cos x$ $\qquad \cos x-\sqrt{3}\,sen\,x=0$

È un'equazione omogenea di primo grado, divido per cos x, sapendo che cos x = 0 non è soluzione dell'equazione:

$1-\sqrt{3}\,tg\,x=0$ $\qquad tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

7. $\frac{\cos x}{1-sen\,x}=\sqrt{3}$ $\qquad c.a.:\,sen\,x\neq 1$

$\cos x=\sqrt{3}\,(1-sen\,x)$ $\qquad \cos x-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,sen\,x=0$

Si tratta di un'equazione lineare, che risolvo in modo grafico, ponendo cos x = X e sen x = Y:

$\begin{cases}X+\sqrt{3}\,Y=\sqrt{3}\\X^2+Y^2=1\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}X=-\sqrt{3}\,Y+\sqrt{3}\\3Y^2+3-6Y+Y^2=1\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}X=-\sqrt{3}\,Y+\sqrt{3}\\2Y^2-3Y+1=0\end{cases}$

$Y=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\left\langle\begin{matrix}1 & non\ acc.\ per\ c.a.\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ $\qquad \begin{cases}X=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\\Y=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}X=\frac{\sqrt{3}}{2}\\Y=\frac{1}{2}\end{cases}$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

8. $5\ sen^2 x + (\sqrt{3} - 1)\ sen\, x \cos x + (4 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 4$

È un'equazione di secondo grado riconducibile a omogenea, moltiplicando 4 per $\cos^2 x + sen^2 x$:

$$5\ sen^2 x + (\sqrt{3} - 1)\ sen\, x \cos x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x = 4 (\cos^2 x + sen^2 x)$$

$$5\ sen^2 x + (\sqrt{3} - 1)\ sen\, x \cos x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x = 4 \cos^2 x + 4\ sen^2 x$$

$$sen^2 x + (\sqrt{3} - 1)\ sen\, x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

Divido per $\cos^2 x$, avendo verificato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione

$$tg^2 x + (\sqrt{3} - 1)\ tg\, x - \sqrt{3} = 0$$

$$tg\, x = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3})}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{matrix} \right.$$

$tg\, x = 1$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$tg\, x = -\sqrt{3}$ $\qquad x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$

9. $\cos 3x - sen\ 3x = 1$

È un'equazione lineare che posso risolvere in forma grafica, ponendo cos 3x = X e sen 3x = Y:

$$\begin{cases} X - Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = Y + 1 \\ Y^2 + 2Y + 1 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = Y + 1 \\ 2Y^2 + 2Y = 0 \end{cases}$$

$$2Y\ (Y + 1) = 0 \qquad \left\langle \begin{matrix} Y = 0 \\ Y = -1 \end{matrix} \right.$$

$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$ $\qquad 3x = 2k\pi$ $\qquad x = \frac{2}{3}k\pi$

$\begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases}$ $\qquad 3x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$