1. Determina l'equazione dell'ellisse (e rappresentala) che ha per vertici i punti di intersezione tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 12 = 0$ e gli assi cartesiani (tra le diverse situazioni possibili scegli il caso in cui il punto sull'asse x ha un'ascissa maggiore dell'ordinata del punto sull'asse y). Determina inoltre l'equazione della tangente all'ellisse nel suo punto di ascissa 4 situato nel primo quadrante.

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione prima dell'asse x e poi dell'asse y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{1} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad y^2 - 8y + 12 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{1} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Secondo le indicazioni fornite nel testo (tra le diverse situazioni possibili scegli il caso in cui il punto sull'asse x ha un'ascissa maggiore dell'ordinata del punto sull'asse y), i vertici dell'ellisse hanno coordinate A (6; 0) e B (0; 2).

L'equazione dell'ellisse richiesta è: $x^2 + 9y^2 = 36$

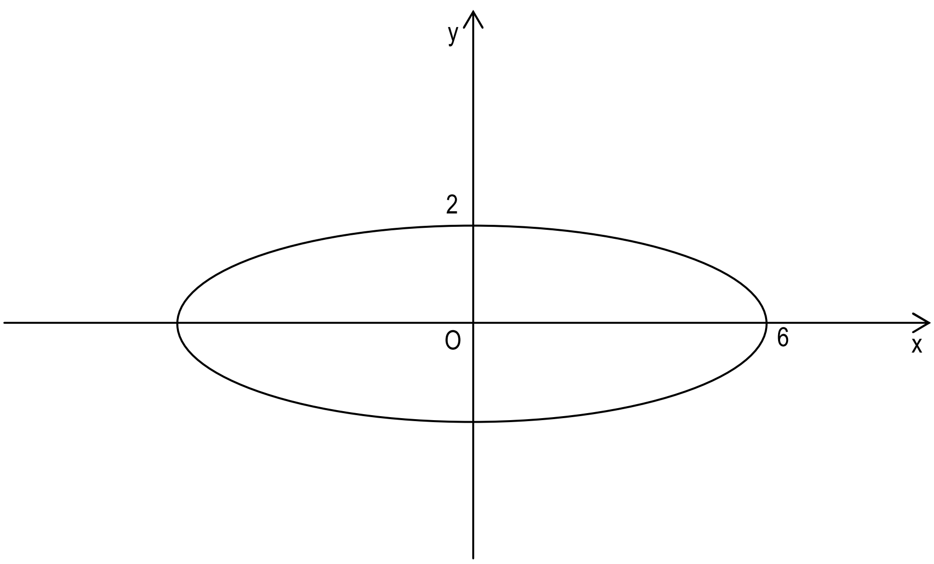
Determino l'ordinata del punto di ascissa 4 situato nel primo quadrante, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'ellisse:

$$16 + 9y^2 = 36 \qquad 9y^2 = 20 \qquad y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Il punto del primo quadrante ha coordinate: $\left(4; \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

Applicando la regola dello sdoppiamento, determino l'equazione della tangente all'ellisse:

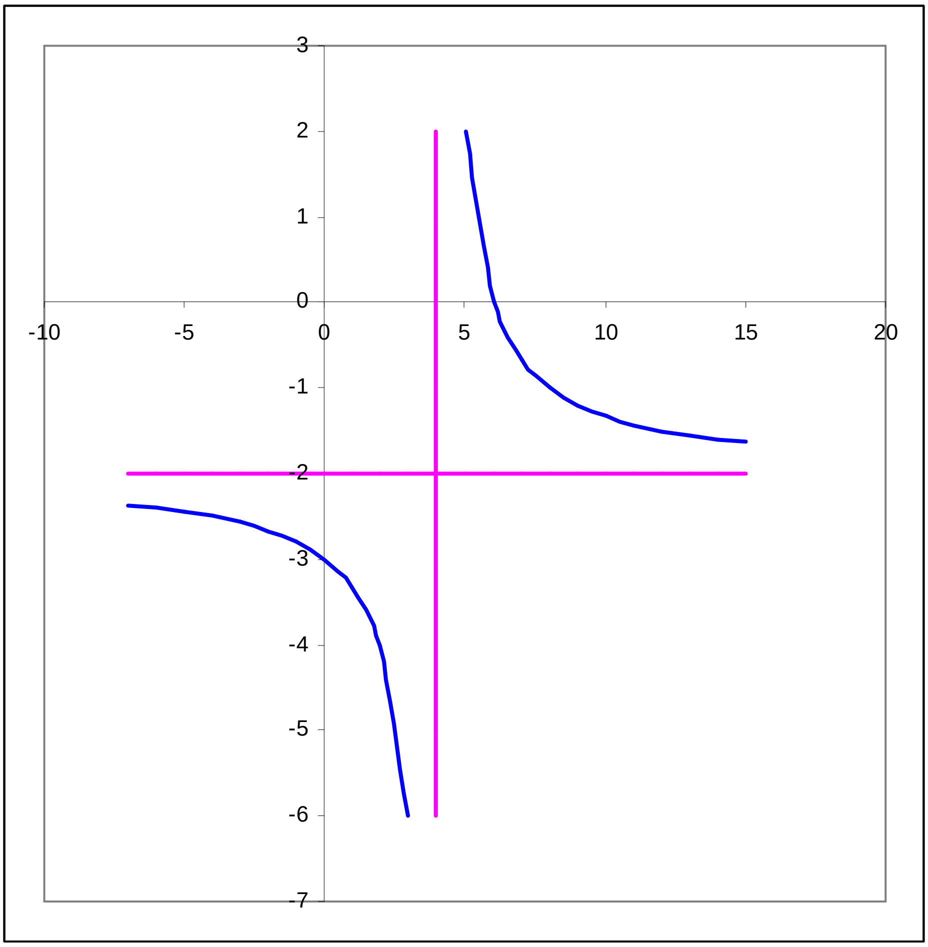
$$2x + 3\sqrt{5}\,y = 18$$



2. Determina l'equazione della funzione omografica (e rappresentala) che ha centro di simmetria nel punto (4; – 2) e che passa per il punto dell'asse y di ordinata – 3.

La generica equazione della funzione omografica è: $y = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$. Il generico centro di simmetria della funzione omografica ha coordinate $\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$. Ottengo le tre condizioni per determinare l'equazione della funzione omografica, ponendo le generiche coordinate del centro di simmetria uguali a quelle date nel testo e sostituendo le coordinate del punto (0; – 3) nell'equazione generica della funzione omografica:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{c} = 4 \\ \dfrac{a}{c} = -2 \\ -3 = \dfrac{b}{d} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -4c \\ a = -2c \\ -3 = \dfrac{b}{-4c} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -4c \\ a = -2c \\ b = 12c \end{cases} \qquad \boxed{y = \dfrac{2x - 12}{4 - x}}$$



3. Data l'iperbole di equazione $x^2 - 3y^2 = 9$, determina le equazioni delle tangenti condotte dal punto (0; 1).

Verifico innanzi tutto se il punto P appartiene o no all'iperbole, sostituendo le coordinate di P nell'equazione dell'iperbole e verificando se ne risulta un'identità:

$$0^2 - 3 \cdot 1^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad -3 \neq 9 \qquad \Rightarrow \qquad P \notin \text{ iperbole}$$

Considero l'equazione della generica retta passante per il punto (0; 1) e metto a sistema questa equazione con l'equazione dell'iperbole, imponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 9 \\ y - 1 = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3(mx+1)^2 = 9 \\ y = mx + 1 \end{cases} \qquad x^2 - 3m^2x^2 - 3 - 6mx - 9 = 0$$

$$x^2(1 - 3m^2) - 6mx - 12 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 9m^2 + 12(1 - 3m^2) = 0$$

$$3m^2 + 4 - 12m^2 = 0 \qquad -9m^2 = -4 \qquad m = \pm\frac{2}{3}$$

$$y = \pm\frac{2}{3}x + 1$$