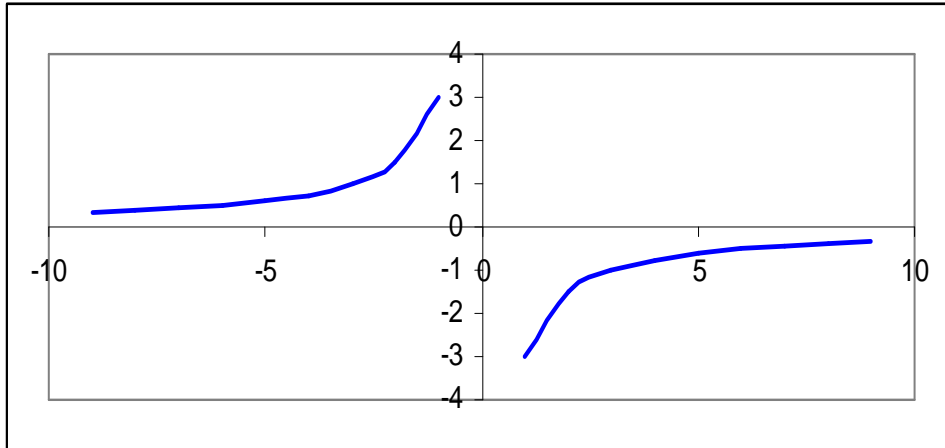


1. Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi asintoti che passa per il punto A $(-3; 1)$ e rappresentala.

L'equazione dell'iperbole riferita ai suoi asintoti ha equazione generica: $xy = k$. Sostituendo all'equazione generica le coordinate del punto A, si ottiene:

$$xy = -3$$



2. Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria che passa per i punti $(0, -2)$ e $(\sqrt{5}; \frac{2\sqrt{14}}{3})$.

Determina le tangenti passanti per i punti: $(3; 0)$, $(0; 2)$, $(0; 4)$, $(\frac{9}{2}; \sqrt{13})$.

L'equazione generica dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, visto e considerato che uno dei punti per cui passa l'iperbole è $(0, -2)$, situato sull'asse y e perciò l'iperbole ha come asse focale l'asse y. Dalle coordinate del punto $(0, -2)$, ricavo $b^2 = 4$. Perciò l'equazione generica diventa: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = -1$. Sostituendo le coordinate del punto $(\sqrt{5}; \frac{2\sqrt{14}}{3})$,

ricavo l'equazione dell'iperbole:

$$\frac{5}{a^2} - \frac{\frac{4}{9} \cdot 14}{4} = -1 \quad \frac{5}{a^2} - \frac{14}{9} = -1 \quad \frac{5}{a^2} = \frac{14}{9} - 1 \quad \frac{5}{a^2} = \frac{5}{9}$$

$$a^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$$

- a. Il punto $(3; 0)$ non appartiene all'iperbole, perciò determino l'equazione della generica retta passante per il punto $y = m(x - 3)$ e la metto a sistema con l'equazione dell'iperbole, imponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = m(x - 3) \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = m(x - 3) \\ \frac{x^2}{9} - \frac{m^2 x^2 - 6m^2 x + 9m^2}{4} = -1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 9m^2 x^2 + 54m^2 x - 81m^2 = -36$$

$$(4 - 9m^2)x^2 + 54m^2 x - 81m^2 + 36 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 27^2 m^4 - (4 - 9m^2)(9(-9m^2 + 4)) = 0$$

$$81m^4 - (4 - 9m^2)(-9m^2 + 4) = 0$$

$$81m^4 - 16 - 81m^4 + 72m^2 = 0$$

$$72m^2 = 16 \quad 9m^2 = 2 \quad m = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}(x - 3)$$

- b. Il punto $(0; 2)$ appartiene all'iperbole ed è uno dei suoi vertici, perciò la retta tangente all'iperbole in questo punto è una retta parallela all'asse x, di equazione: $y = 2$

- c. Il punto $(0; 4)$ è all'interno dell'iperbole perciò non è possibile determinare l'equazione di una retta che sia tangente all'iperbole.

- d. Il punto $\left(\frac{9}{2}; \sqrt{13}\right)$ appartiene all'iperbole, infatti sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'iperbole si

ottiene: $\frac{9^2}{4} \cdot \frac{1}{9} - \frac{13}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = -1.$

Per determinare l'equazione della tangente in questo punto, posso applicare la regola dello sdoppiamento:

$$\frac{9}{2}x - \frac{y\sqrt{13}}{4} = -1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{13}}{4} = -1$$

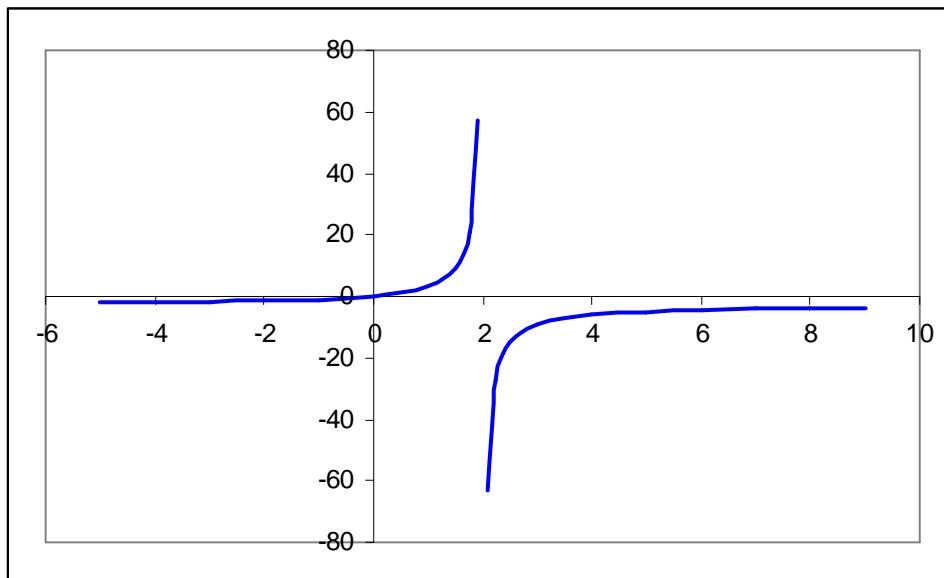
$$2x - y\sqrt{13} + 4 = 0$$

3. Scrivi l'equazione dell'iperbole del tipo $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, passante per l'origine e con centro di simmetria $(2; -3)$ e rappresentala. Determina l'equazione delle tangenti parallele alla bisettrice di primo e terzo quadrante.

Visto che l'iperbole passa per l'origine, l'equazione generica diventa: $y = \frac{ax}{cx + d}$. Utilizzo le coordinate del centro di simmetria

per determinare gli altri coefficienti:

$$\begin{cases} -\frac{d}{c} = 2 \\ \frac{a}{c} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2c \\ a = -3c \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-3x}{x - 2}$$



La bisettrice di primo e terzo quadrante ha coefficiente angolare 1, perciò devo determinare la retta, di equazione generica $y = x + q$, tangente all'iperbole. Metto a sistema le due equazioni e pongo il $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = x + q \\ y = \frac{-3x}{x - 2} \end{cases} \quad x + q = \frac{-3x}{x - 2} \quad x^2 - 2x + qx - 2q = -3x$$

$$x^2 + x(1 + q) - 2q = 0$$

$$\Delta = (1 + q)^2 + 8q = 0$$

$$1 + 2q + q^2 + 8q = 0$$

$$q^2 + 10q + 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 1}}{1} = -5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$y = x - 5 \pm 2\sqrt{6}$$