1. Determina l'equazione dell'ellisse passante per il punto $P\left(\frac{2}{3};-\sqrt{5}\right)$ e avente fuoco $F\,(0;2\sqrt{2})$ e rappresentala.

Visto che l'ellisse ha un fuoco sull'asse y, significa che $b > a$, nell'equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Sapendo che l'ordinata del fuoco è c e che tra i parametri a, b e c sussiste la relazione: $c=\sqrt{b^2-a^2}$, ho la prima relazione per determinare l'equazione dell'ellisse: $\sqrt{b^2-a^2}=2\sqrt{2}$.

Ottengo la seconda relazione, sostituendo nella generica equazione dell'ellisse le coordinate del punto P:

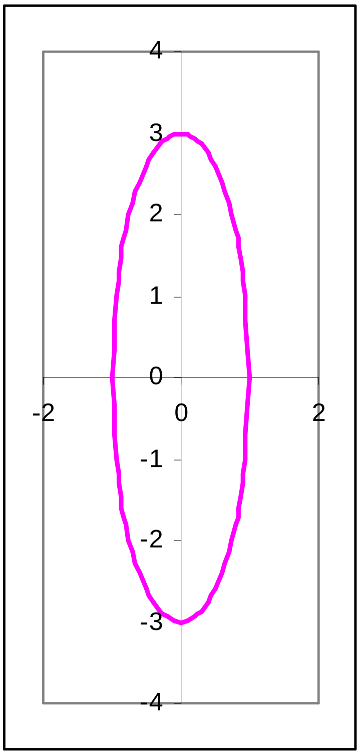
$$\frac{4}{9a^2}+\frac{5}{b^2}=1$$

Metto a sistema le due relazioni così determinate:

$$\begin{cases} b^2-a^2=8 \\ \frac{4}{9a^2}+\frac{5}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=a^2+8 \\ \frac{4}{9a^2}+\frac{5}{a^2+8}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=a^2+8 \\ 4a^2+32+45a^2=9a^2(a^2+8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=a^2+8 \\ 4a^2+32+45a^2=9a^4+72a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=a^2+8 \\ 9a^4+23a^2-32=0 \end{cases}$$

$$a^2_{1,2}=\frac{-23\pm\sqrt{529+1052}}{18} \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{64}{18} \quad \textit{non accettabile} \end{array} \right. \qquad \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=9 \end{cases} \qquad \boxed{x^2+\frac{y^2}{9}=1}$$



2. Determina la tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ nel suo punto di ordinata 2 situato nel secondo quadrante.

Determino innanzi tutto l'ascissa del punto dell'ellisse di ordinata 2, sostituendo il valore dell'ordinata nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{4}{9}=1 \qquad \frac{x^2}{4}=1-\frac{4}{9} \qquad \frac{x^2}{4}=\frac{5}{9} \qquad x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Visto che il punto si trova nel secondo quadrante ha coordinate: $P\left(-\frac{2}{3}\sqrt{5};\,2\right)$

Applicando la regola dello sdoppiamento, determino l'equazione della tangente all'ellisse nel punto P:

$$\frac{-\frac{2}{3}\sqrt{5}\,x}{4}+\frac{2y}{9}=1 \qquad -\frac{\sqrt{5}\,x}{6}+\frac{2y}{9}=1 \qquad \boxed{3\sqrt{5}\,x-4\,y=-18}$$

3. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $4x^2-y^2=1$, condotte dal punto $P\,(0;-2)$.

Determino la generica retta passante per il punto P: $y+2=mx \qquad y=mx-2$

Metto a sistema l'equazione della retta generica con l'equazione dell'iperbole e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y=mx-2 \\ 4x^2-y^2=1 \end{cases} \qquad 4x^2-(mx-2)^2=1 \qquad 4x^2-m^2x^2-4+4mx=1$$

$$x^2\,(4-m^2)+4mx-5=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4m^2+5\,(4-m^2)=0$$

$$4m^2+20-5m^2=0 \qquad m^2=20 \qquad m=\pm\,2\sqrt{5}$$

$$\boxed{y=\pm2\sqrt{5}\,x-2}$$