1. Determina l'equazione dell'ellisse passante per il punto $P\left(\frac{1}{3}; -2\sqrt{2}\right)$ e avente fuoco $F\,(0; 2\sqrt{2})$ e rappresentala.

Visto che l'ellisse ha un fuoco sull'asse y, significa che $b > a$, nell'equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sapendo che l'ordinata del fuoco è c e che tra i parametri a, b e c sussiste la relazione: $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, ho la prima relazione per determinare l'equazione dell'ellisse: $\sqrt{b^2 - a^2} = 2\sqrt{2}$.

Ottengo la seconda relazione, sostituendo nella generica equazione dell'ellisse le coordinate del punto P:

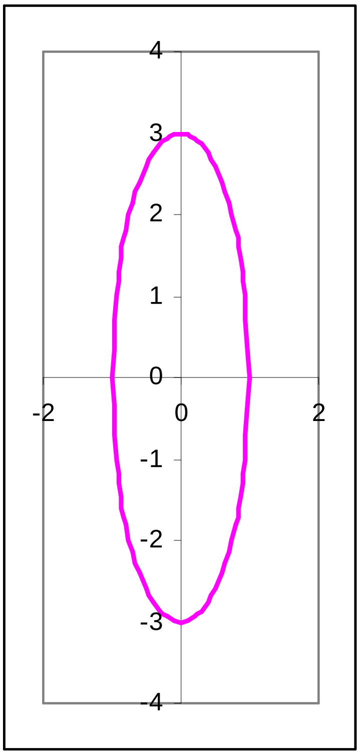
$$\frac{1}{9a^2} + \frac{8}{b^2} = 1$$

Metto a sistema le due relazioni così determinate:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 8 \\ \frac{1}{9a^2} + \frac{8}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = a^2 + 8 \\ \frac{1}{9a^2} + \frac{8}{a^2 + 8} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = a^2 + 8 \\ a^2 + 8 + 72\,a^2 = 9a^2\,(a^2 + 8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + 8 \\ a^2 + 8 + 72\,a^2 = 9a^4 + 72a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = a^2 + 8 \\ 9a^4 - a^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$a^2_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{18} \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{16}{18} \quad \textit{non accettabile} \end{array} \right. \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \qquad \boxed{x^2 + \frac{y^2}{9} = 1}$$



2. Determina la tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ nel suo punto di ascissa 2 situato nel quarto quadrante.

Determino innanzi tutto l'ordinata del punto dell'ellisse di ascissa 2, sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{4}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad \frac{y^2}{4}=1-\frac{4}{9} \qquad \frac{y^2}{4}=\frac{5}{9} \qquad y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Visto che il punto si trova nel quarto quadrante ha coordinate: $P\left(2;-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$

Applicando la regola dello sdoppiamento, determino l'equazione della tangente all'ellisse nel punto P:

$$\frac{2x}{9}+\frac{-\frac{2}{3}\sqrt{5}\,y}{4}=1 \qquad \frac{2x}{9}-\frac{\sqrt{5}\,y}{6}=1 \qquad \boxed{4x-3\sqrt{5}\,y=18}$$

3. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $4x^2-y^2=1$, condotte dal punto $P\,(0;2)$.

Determino la generica retta passante per il punto P: $y-2=mx$ $\qquad y=mx+2$

Metto a sistema l'equazione della retta generica con l'equazione dell'iperbole e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y=mx+2 \\ 4x^2-y^2=1 \end{cases} \qquad 4x^2-(mx+2)^2=1 \qquad 4x^2-m^2x^2-4-4mx=1$$

$$x^2(4-m^2)-4mx-5=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4m^2+5(4-m^2)=0$$

$$4m^2+20-5m^2=0 \qquad m^2=20 \qquad m=\pm2\sqrt{5}$$

$$\boxed{y=\pm2\sqrt{5}\,x+2}$$