1. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per tangente nell'origine la bisettrice di 1° e 3° quadrante e passante per il punto A (O; – 6) e rappresentala.

Essendo la circonferenza tangente nell'origine alla bisettrice di 1° e 3° quadrante, il suo centro si trova sulla perpendicolare alla bisettrice di 1° e 3° quadrante passante per l'origine, ovvero sulla bisettrice di 2° e 4° quadrante.
Visto che la circonferenza passa sia per il punto A che per l'origine, il centro si trova sull'asse del segmento OA. Possiamo determinare facilmente l'equazione dell'asse, visto che entrambi i punti si trovano sull'asse y. L'asse è perpendicolare all'asse y, ovvero parallela all'asse x, e ha equazione: y = – 3.
Determino quindi le coordinate del centro, intersecando l'asse con la bisettrice di 2° e 4° quadrante:

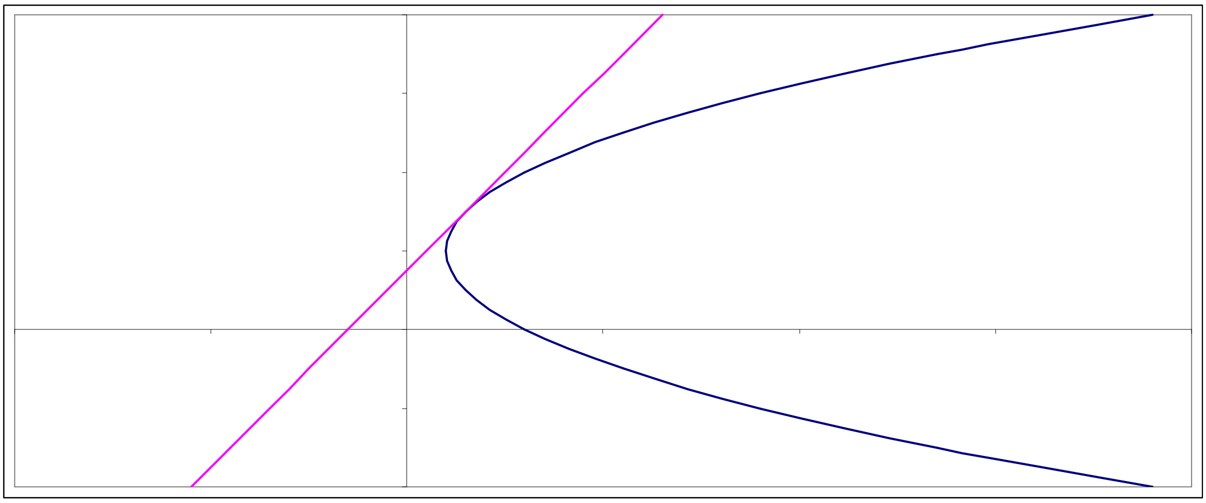
$$\begin{cases} x = -y \\ y = -3 \end{cases} \qquad C\ (3; -3)$$

Considerato che la circonferenza passa per l'origine, la sua equazione ha c = 0. Perciò:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+3)^2 = r^2 \quad \Rightarrow$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$$

Avendo le coordinate del centro e le coordinate di un punto appartenente alla circonferenza, è facile rappresentarla, basta puntare il compasso nel centro C con apertura CA (o CO indifferentemente).

2. Dopo aver rappresentato la parabola x = y² – 4 y + 6, determina la retta ad essa tangente e perpendicolare alla retta 2 x + y – 6 = 0.



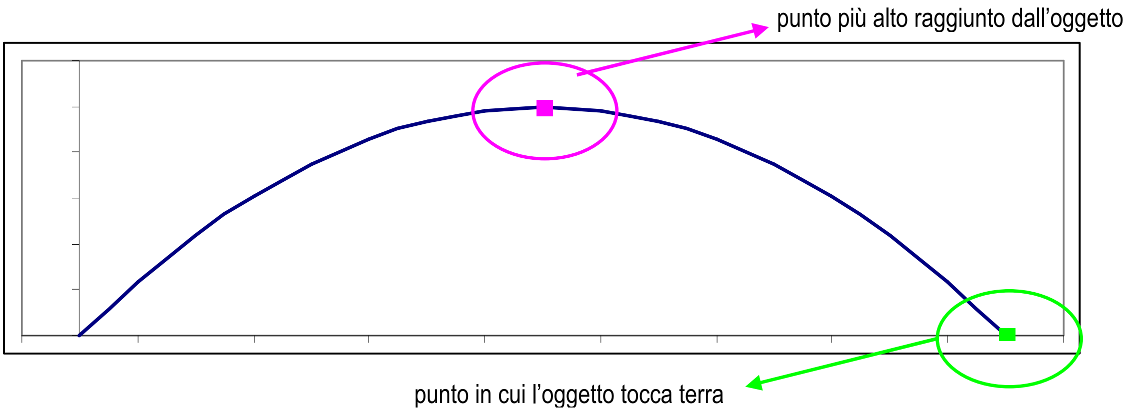
Metto innanzi tutto in forma esplicita la retta 2x + y – 6 = 0: y = – 2x + 6. La generica retta perpendicolare a questa retta data ha coefficiente angolare pari all'antireciproco di – 2.
Metto a sistema la generica retta perpendicolare alla retta data e l'equazione della parabola e impongo Δ = 0 nella risolvente:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + q \\ x = y^2 - 4y + 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 2q \\ 2y - 2q = y^2 - 4y + 6 \end{cases} \qquad y^2 - 6y + 2q + 6 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - (2q + 6) = 0 \qquad 9 - 2q - 6 = 0 \qquad q = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

3. La traiettoria di un oggetto lanciato in aria è data da una parabola di equazione $y = -\frac{5}{64}x^2 + \frac{5}{4}x$. Supponendo che l'asse x rappresenti il terreno e l'asse y l'altezza, qual è l'altezza più alta raggiunta dall'oggetto? A quale distanza dal punto di partenza l'oggetto torna di nuovo a terra? (suggerimento: rappresenta la traiettoria dell'oggetto).



Per determinare il punto più alto raggiunto dall'oggetto, non devo far altro che determinare l'ordinata del vertice della parabola:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2}{4a} = \frac{-\frac{25}{16}}{4 \cdot \left(-\frac{5}{64}\right)} = \boxed{5}$$

Per determinare il punto in cui l'oggetto tocca di nuovo terra, devo intersecare la parabola con l'asse x. I due punti di intersezione che si ottengono sono, rispettivamente, il punto di partenza (l'origine) e il punto di arrivo:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{64}x^2 + \frac{5}{4}x \\ y = 0 \end{cases} \qquad -\frac{5}{64}x^2 + \frac{5}{4}x = 0 \qquad x(x - 16) = 0 \qquad x = \boxed{16}$$