SISTEMI DI EQUAZIONI

Alcuni semplici problemi per iniziare…

Analizziamo tre semplici problemi che compaiono nel *Liber Abaci* di Fibonacci, risolvibili con sistemi di equazioni.
Il primo problema compare nella *Parte terza* del capitolo XII del *Liber Abaci*, foglio 45 *verso* del manoscritto:

> *Due amici con dei denari*
>
> *Un uomo dice a un amico: «Se mi dai 7 dei tuoi denari avrò cinque volte la somma che ti rimarrà». L'amico gli risponde: «Se dai tu a me 5 denari, ne avrò sette volte i tuoi».*
> *Quanti denari possiede ognuno dei due uomini?*

La formalizzazione del problema è abbastanza semplice:

Somma posseduta dal primo uomo	x
Somma posseduta dal secondo uomo	y
«Se mi dai 7 dei tuoi denari avrò cinque volte la somma che ti rimarrà» Il primo uomo, se il secondo gli dà 7 denari, si trova con $x+7$ denari; il secondo uomo ha ora $y-7$ denari; e il primo uomo, dopo lo scambio di denari, ha 5 volte la somma rimasta al secondo uomo.	$x+7=5\,(y-7)$
«Se dai tu a me 5 denari, ne avrò sette volte i tuoi» Il secondo uomo, se il secondo gli dà 5 denari, si trova con $y+5$ denari; il primo uomo ha ora $x-5$ denari; e il secondo uomo, dopo lo scambio di denari, ha 7 volte la somma rimasta al primo uomo.	$y+5=7\,(x-5)$

Ecco determinato il sistema risolutivo:

$$\begin{cases} x+7=5\,(y-7) \\ y+5=7\,(x-5) \end{cases}$$

Per la soluzione del sistema, si presta bene, e abbastanza intuitivamente, l'applicazione del metodo di sostituzione: ricaviamo la x in funzione di y dalla prima equazione e la sostituiamo nella seconda equazione, che diventa un'equazione di primo grado in y, facilmente risolvibile:

$$\begin{cases} x=5\,(y-7)-7=\underline{\underline{5y-42}} \\ y+5=7\,(\underline{\underline{5y-42}}-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5y-42 \\ y+5=35y-329 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x==5y-42 \\ -34\;y=-334 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x==5\cdot\dfrac{167}{17}-42 \\ y=\dfrac{167}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x==\dfrac{121}{17} \\ y=\dfrac{167}{17} \end{cases}$$

Fibonacci in questo caso scrive: «Se vuoi usare il metodo arabo in questo problema, poni che il secondo amico abbia la cosa più i 7 denari che cederà al primo uomo, dato che il primo uomo contando i 7 denari ha cinque volte la somma rimasta al secondo uomo. Dopo lo scambio, il primo avrà il valore corrispondente a 5 cose, mentre prima dello scambio aveva 5 cose meno 7 denari». Con un linguaggio simbolico (più semplice) scriveremmo:

	Prima degli scambi	Dopo il 1° scambio	Dopo il 2° scambio
Primo uomo	$5x-7$	$5x$	$5x-12$
Secondo uomo	$x+7$	x	$x+12$

Dopo questa premessa, Fibonacci aggiunge che «7 volte le 5 cose meno 12 denari, cioè 35 cose meno 84 denari è la stessa quantità di 1 cosa più 12 denari», ovvero:

$$7\,(5x-12)=x+12 \qquad \Rightarrow \qquad 35x-84=x+12 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{96}{34}=\frac{48}{17}$$

Da cui si ricavano i valori trovati risolvendo il sistema.
Lo stesso problema è risolto da Fibonacci anche con quello che chiama *secondo metodo dell'albero*. È il metodo in cui fa uso della rappresentazione delle grandezze con segmenti.[1]

Il secondo problema compare nella *Parte settima* del capitolo XII del *Liber Abaci*, foglio 70 *recto* del manoscritto, con il titolo *L'eredità dei beni di un uomo*:

> *Un tale, poco prima di morire, chiamò il figlio maggiore e gli disse: «Dividete tra voi le mie poche sostanze. Tu terrai 1 bisante e 1/7 dei rimanenti».*
> *Al secondo figlio disse: «Tu prenderai 2 bisanti e 1/7 dei rimanenti».*
> *Al terzo disse di prendere 3 bisanti e 1/7 dei rimanenti.*
> *Così chiamò tutti i suoi figli in ordine decrescente di età, dando a ciascuno 1 bisante in più rispetto al figlio precedente e sempre 1/7 dei rimanenti. L'ultimo, infine, prese tutto quanto avanzava.*
> *Dopo aver ripartito l'intera eredità, i figli videro che ognuno aveva ricevuto lo stesso numero di bisanti.*
> *Quanti erano i figli e quanti bisanti ricevette ognuno?*

Cerchiamo di formalizzare il problema nel modo seguente:

Numero di figli	x
Eredità per ogni figlio	y
Totale dell'eredità	$x\,y$

Secondo questa formalizzazione le eredità dei figli diventano:

Primo figlio	Eredità rimasta dopo aver tolto l'eredità del primo figlio	Secondo figlio	…
$1+\frac{1}{7}(xy-1)$	$xy-y$	$2+\frac{1}{7}(xy-y-2)$	…

Il sistema lineare che ne risulta è:

$$\begin{cases} y=1+\frac{1}{7}(xy-1) \\ y=2+\frac{1}{7}(xy-y-2) \end{cases}$$

Il sistema si presta ad una soluzione tramite il metodo del confronto:

$$\begin{cases} y=1+\frac{1}{7}(xy-1) \\ y=2+\frac{1}{7}(xy-y-2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=1+\frac{1}{7}(xy-1) \\ 1+\frac{1}{7}(xy-1)=2+\frac{1}{7}(xy-y-2) \end{cases}$$

$$1+\frac{1}{7}xy-\frac{1}{7}=2+\frac{1}{7}xy-\frac{1}{7}y-\frac{2}{7} \qquad \Rightarrow \qquad y=6$$

Sostituendo il risultato ottenuto nella prima equazione, ottengo: $x=6$.
In altre parole, i figli sono 6 e ottengono, ognuno, 6 denari a testa.

---

[1] Vedi bibliografia

Il terzo problema compare nella *Parte settima* del capitolo XII del *Liber Abaci*, foglio 72 *verso* del manoscritto, con il titolo *Di cinque uomini con denari*:

> *Ci sono cinque uomini con dei denari. Quattro di loro, senza il quinto, ne hanno 27; senza il primo, gli altri ne hanno 31; senza il secondo, gli altri ne hanno 34; senza il terzo, gli altri ne hanno 37; senza il quarto, gli altri ne hanno 39. Quanti denari possiede ogni uomo?*

	Primo uomo	Secondo uomo	Terzo uomo	Quarto uomo	Quinto uomo	Totale
Somma di denari posseduta	a	b	c	d	e	x

Con i dati forniti, otteniamo:

Quattro di loro, senza il quinto, ne hanno 27	$x - e = 27$	$\Rightarrow$	$e = x - 27$
senza il primo, gli altri ne hanno 31	$x - a = 31$	$\Rightarrow$	$a = x - 31$
senza il secondo, gli altri ne hanno 34	$x - b = 34$	$\Rightarrow$	$b = x - 34$
senza il terzo, gli altri ne hanno 37	$x - c = 37$	$\Rightarrow$	$c = x - 37$
senza il quarto, gli altri ne hanno 39	$x - d = 39$	$\Rightarrow$	$d = x - 39$

Il problema si presta alla soluzione anche con un'equazione di primo grado, considerato che $x = a + b + c + d + e$:

$$x = x - 31 + x - 34 + x - 37 + x - 39 + x - 27$$

Risolvendo l'equazione, otteniamo: $x = 42$, ovvero:

	Primo uomo	Secondo uomo	Terzo uomo	Quarto uomo	Quinto uomo
Somma di denari posseduta	11	8	5	3	15

Se scegliessimo di risolvere il problema con un sistema di equazioni, il metodo prescelto potrebbe essere quello del metodo della riduzione:

$$\begin{cases} x - e = 27 \\ x - a = 31 \\ x - b = 34 \\ x - c = 37 \\ x - d = 39 \end{cases}$$

sommando le equazioni membro a membro, otteniamo:

$$x - e + x - a + x - b + x - c + x - d = 27 + 31 + 34 + 37 + 39$$

$$x + x + x + x + x - (a + b + c + d + e) = 27 + 31 + 34 + 37 + 39$$

$$x + x + x + x + x - x = 27 + 31 + 34 + 37 + 39$$

$$4x = 168 \qquad \Rightarrow \qquad x = 42$$

BIBLIOGRAFIA

A cura di Nando Geronimi, *Giochi matematici del medioevo*, Bruno Mondadori, Milano, 2006 (problemi 22, 46 e 54)