EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Alcuni semplici problemi per iniziare…

In un epigramma della "Antologia Palatina", attribuito a Metrodoro di Bisanzio, grammatico e aritmetico vissuto nel VI secolo d.C., si legge una curiosa indicazione dalla quale è possibile trarre l'età del grande matematico greco Diofanto di Alessandria, vissuto tra il II e il III secolo d.C.

> *"Ecco la tomba che racchiude Diofanto; una meraviglia da contemplare! Con artificio aritmetico la pietra insegna la sua età: Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita, dopo un altro dodicesimo le sue guance germogliarono; dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio; e dopo cinque anni gli nacque un figlio. Ma questi, giovane e disgraziato e pur tanto amato, aveva appena raggiunto la metà dell'età cui doveva arrivare suo padre, quando morì. Quattro anni ancora mitigando il proprio dolore con l'occuparsi della scienza dei numeri, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza."*

Il problema si può facilmente risolvere con un'equazione di primo grado a un'incognita. Sia x l'età raggiunta da Diofanto:

Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita	$\frac{1}{6}x$
dopo un altro dodicesimo le sue guance germogliarono	$\frac{1}{12}x$
dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio	$\frac{1}{7}x$
dopo cinque anni gli nacque un figlio	5
Il figlio aveva appena raggiunto la metà dell'età cui doveva arrivare suo padre, quando morì	$\frac{1}{2}x$
Quattro anni ancora attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza	4
Età raggiunta da Diofanto	x

L'equazione diventa quindi:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

che, risolta, dà come soluzione: x = 84, ovvero l'età raggiunta da Diofanto.

Il seguente problema compare nella *Parte terza* del capitolo XII del *Liber Abaci* con il titolo *Di due formiche, una delle quali segue l'altra*, foglio 44 *recto* del manoscritto:

> *Due formiche si trovano alla distanza di 100 passi l'una dall'altra. Si mettono in moto, camminando verso un punto comune. Ogni giorno, la prima avanza di 1/3 di passo e poi indietreggia di 1/4 di passo; la seconda dapprima avanza di 1/5 di passo, poi indietreggia di 1/6 di passo.*
> *Dopo quanti giorni le due formiche si incontreranno?*

Il problema è risolvibile, con alcuni accorgimenti, tramite un'equazione di primo grado in un'incognita:

- la prima formica avanza di 1/3 di passo e indietreggia di 1/4 di passo, ovvero ogni giorno avanza di 1/12 di passo;
- la seconda avanza di 1/5 di passo e indietreggia di 1/6 di passo, ovvero ogni giorno avanza di 1/30 di passo;
- bisogna tenere presente che l'ultimo giorno le due formiche avanzeranno solamente, ma non sarà importante il fatto che indietreggiano, perciò la prima formica avanzerà di 1/3 di passo e la seconda di 1/5 di passo.

Fatte queste considerazioni, l'equazione diventa:

$$\frac{1}{12}x + \frac{1}{3} = 100 + \frac{1}{30}x + \frac{1}{5}$$

Ovvero, il tratto percorso dalla prima formica è uguale al tratto percorso dalla seconda, alla quale si devono aggiungere i 100 passi che avevano di differenza prima di cominciare a muoversi.
Risolvendo si ottiene x = 5992/3 ovvero x = 1997 + 1/3.
In altre parole, sembrerebbe che le due formiche si incontrino al 1998° giorno. Invece dobbiamo aggiungere un giorno, visto che x è il numero dei giorni in cui le due formiche vanno avanti e poi retrocedono e l'(x+1)° giorno vanno solamente avanti. Da cui si deduce che la prima formica raggiungerà la seconda al 1999° giorno.I problema *Il cane e la volpe* che compare nella *Parte terza* del capitolo XII del *Liber Abaci*, foglio 43 *recto* del manoscritto:

> *Una volpe in fuga è 50 passi davanti a un cane che la insegue. Il cane compie un tratto di 9 passi mentre la volpe ne compie uno di 6 passi.*
> *Dopo quanti passi la volpe sarà raggiunta dal cane?*

Possiamo seguire diverse strade, a seconda di quale ci suggerisce il nostro intuito.
Possiamo innanzi tutto notare che dire che il cane compie un tratto di 9 passi, mentre la volpe ne compie uno di 6, equivale a dire che il cane compie un tratto di 3 passi mentre la volpe ne compie uno di 2. In questo modo, durante ogni singolo tratto il cane si avvicina alla volpe di un passo ed essendo 50 i passi che separano i due animali, servono 50 tratti, ovvero $50 \cdot 3 = 150$ passi per il cane, cui corrispondono $50 \cdot 2 = 100$ passi per la volpe.
Se vogliamo formalizzare il problema tramite un'equazione di primo grado, considerando x il numero di tratti che devono compiere i due animali perché il cane raggiunga la volpe, il problema diventa:

$$50 + 6x = 9x$$

$\frac{50}{3} \cdot 9 = 150$ passi per il cane e $\frac{50}{3} \cdot 6 = 100$ passi per la volpe.

> *Dice un giovane: "Oggi, se al triplo della mia età aggiungo 1/4 e 1/3 di quanto ho già vissuto, mi manca solo un anno per avere 100 anni".*
> *Qual è l'esatta età del giovane? (in anni, mesi e giorni, eventualmente arrotondando al numero di giorni più vicino)*

L'equazione che otteniamo è:

$$3x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 1 = 100$$

il cui risultato è: $x = \frac{1188}{43}$. Convertiamo il risultato ottenuto in anni, mesi e giorni: $\frac{1188}{43} = 27 + \frac{27}{43}$.

27 è il numero di anni, la frazione $\frac{27}{43}$ ci offre il numero di mesi e giorni, perciò con la proporzione: $27 : 43 = x : 12$, ricaviamo il numero di mesi:

$$x = \frac{324}{43} = 7 + \frac{23}{43}$$

7 è il numero di mesi, la frazione $\frac{23}{43}$ ci offre il numero di giorni, perciò con la proporzione: $23 : 43 = x : 30$, ricaviamo il numero di giorni:

$$x = \frac{690}{43} = 16 + \frac{2}{43}$$

E la soluzione corrisponde quindi a 27 anni, 7 mesi e 16 giorni, essendo 16 l'arrotondamento migliore del risultato ottenuto.

Concludiamo con un semplice problema che ci permette di capire il metodo della *falsa posizione* applicato da Fibonacci nella soluzione dei problemi. Il problema compare nella *Parte terza* del capitolo XII del *Liber Abaci* con il titolo *Di un albero*, foglio 41 *verso* del manoscritto:

> *Di un albero, 1/4 1/3 sono sotto terra. La parte di albero sotterranea misura 21 palmi.*
> *Qual è l'altezza dell'albero?*

L’equazione che otteniamo è:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)x = 21$$

da cui otteniamo: x = 36.
Per il metodo della *falsa posizione* possiamo seguire quanto indicato da Nando Geronimi in “Giochi matematici del medioevo” (Bruno Mondadori, Milano, 2006, pag. 5):

> Supponiamo che l’albero misuri 12 palmi (Fibonacci ci suggerisce di scegliere 12 perché è il più piccolo intero multiplo di 3 e di 4). Allora la somma di 1/4 di 12 e di 1/3 di 12 è uguale a 7 palmi. Questa sarebbe la lunghezza della parte interrata, se la pianta fosse alta 12 palmi. Ma il problema ci dice che la parte sotto terra misura 21 palmi, e non 7. Osservando che 21 è il triplo di 7, l’altezza dell’albero sarà il triplo di 12 (l’altezza inizialmente presa come *falsa posizione*), cioè 36 palmi.

BIBLIOGRAFIA

A cura di Nando Geronimi, *Giochi matematici del medioevo*, Bruno Mondadori, Milano, 2006 (problemi 12, 7, 3 e 2)