Fare ricerca matematica è come cercare di farsi strada
per guadagnare la vetta di una grande montagna.
Keith Devlin

A COSA SERVONO LE DISEQUAZIONI???

Allo studente di una seconda superiore che si trova per la prima volta ad avere a che fare con le disequazioni, questi astrusi metodi di calcolo potrebbero sembrare una cosa completamente inutile. Ma non è certo così. Basti pensare allo studio di funzione… Come a dire che uno studente di seconda superiore sa di cosa si sta parlando!
Ecco qua di seguito un esempio tra i più semplici, solo per mostrare quanto le disequazioni siano protagoniste nello studio di funzione[1]. Anche se molte cose non si capiscono, può essere utile buttare uno sguardo nel futuro e vedere cosa ci aspetta.

Sia data la funzione: $y = \ln \frac{x+2}{x}$

1. Dominio: per determinare il dominio di questa funzione, bisogna imporre positivo l'argomento del logaritmo, cioè: $\frac{x+2}{x} > 0$. Risolvendo la disequazione frazionaria si ottiene: $x < -2 \ \vee \ x > 0$.

2. Per determinare le intersezioni con l'asse *x*, possiamo risolvere il sistema che ha come equazioni quella della funzione e quella dell'asse *x*:
$$\begin{cases} y = \ln \frac{x+2}{x} \\ y = 0 \end{cases}$$
Il sistema è impossibile, perciò non ci sono intersezioni con l'asse *x*.
Con l'asse *y* non ci sono intersezioni: lo sappiamo già, visto che l'asse *y* è escluso dal dominio della funzione.

3. Per determinare gli intervalli di positività della funzione, risolviamo la disequazione logaritmica: $\ln \frac{x+2}{x} \geq 0$, che si riduce alla soluzione della disequazione frazionaria: $\frac{x+2}{x} \geq 1$, la cui soluzione è $x > 0$.

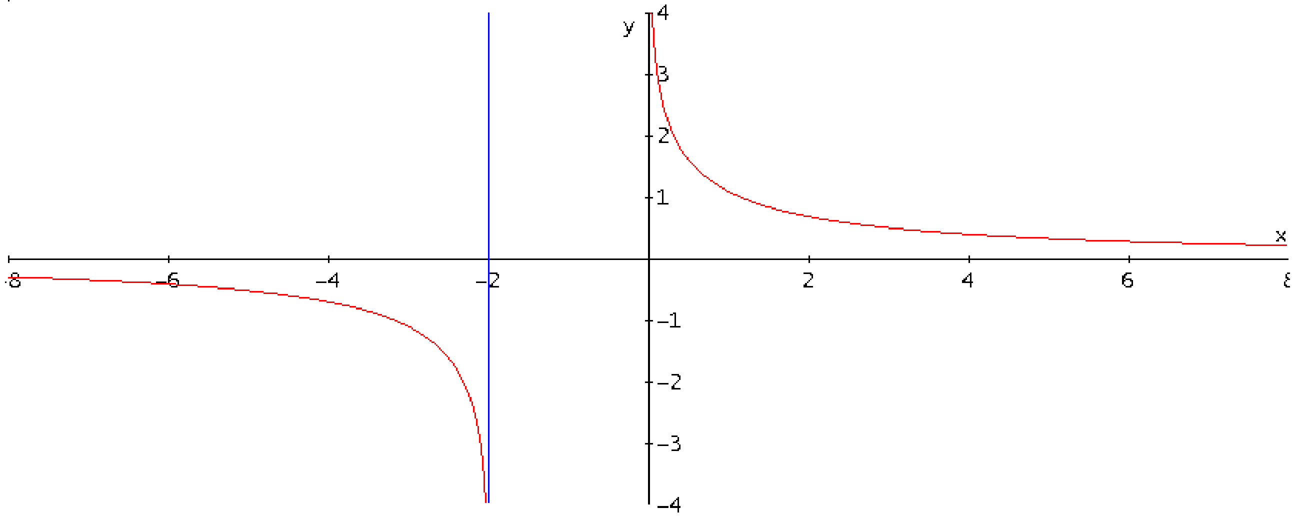
4. Dai limiti ai confini del campo di esistenza,
$$\lim_{x \to -2} \ln \frac{x+2}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln \frac{x+2}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \ln \frac{x+2}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x+2}{x} = 0$$
si deduce che la funzione ammette, come asintoti verticali, le rette di equazione: $x = -2$ e $x = 0$ e come asintoto orizzontale la retta $y = 0$, cioè l'asse *x*.

5. Derivando la funzione, si ottiene: $y' = -\frac{2}{x(x+2)}$. Per determinare i massimi e i minimi, si risolve la disequazione frazionaria: $-\frac{2}{x(x+2)} > 0$, che ha come soluzione $-2 < x < 0$. Perciò la funzione non ammette né massimi né minimi ed è sempre decrescente.

[1] Per chi si domandasse a cosa serva lo studio di funzione, forse potrebbe essere utile rileggere (o leggere…) gli appunti sulle funzioni… In ogni caso, è utile ricordare che la matematica necessaria per fare la spesa la si impara alle elementari.

6. Calcolando la derivata seconda, si ottiene: $y'' = \dfrac{4\,(x+1)}{x^2\,(x+2)^2}$. Per determinare la concavità e gli eventuali flessi della funzione, si risolve la disequazione frazionaria: $\dfrac{4\,(x+1)}{x^2\,(x+2)^2} > 0$, che ha come soluzione: $x > -1$.
   Aggiungendo il dominio della funzione, la soluzione della disequazione diventa: $x > 0$.
   Perciò la funzione ha concavità rivolta verso il basso per $x < -2$ e concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$ e non ha punti di flesso.

7. A questo punto, possiamo disegnare il grafico della funzione:



La retta in blu costituisce l'asintoto verticale di equazione $x = -2$, mentre la funzione è rappresentata in rosso.