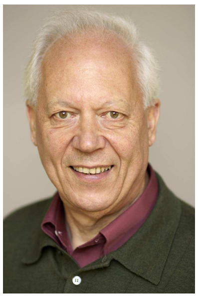
Per comprendere la matematica occorre far funzionare il cervello,
e questo costa sempre un certo sforzo.
Lucio Lombardo Radice

LE GIOIE DELLA MATEMATICA…

Consapevoli della difficoltà e dello sforzo necessari per imparare la matematica, una buona percentuale degli alunni delle superiori (ma non solo) sceglie, più o meno consapevolmente, di dichiararsi incapace e di trovare così una facile giustificazione alla propria non riuscita. Eppure, anche i più grandi matematici sostengono che non ci vuole una particolare intelligenza per avere buoni voti in matematica e contestano l'affermazione secondo la quale l'abilità matematica si trasmetta geneticamente. Gli studi condotti dimostrano invece "*che la passione può generare il talento*". Basta considerare i grandi calcolatori, che si devono allenare ogni giorno se non vogliono vedere indebolirsi la propria arte.



Enrico Bombieri (classe 1940), matematico, è l'unico vincitore italiano della medaglia Fields (1974). La medaglia Fields è la massima onorificenza di cui possano essere insigniti quei matematici che si siano distinti in qualche modo, purché non abbiano superato i quarant'anni. Viene assegnata al massimo a quattro matematici durante il quadriennale congresso internazionale, dall'Unione Internazione dei Matematici (IMU) ed è stata istituita nel 1936 per iniziativa del matematico canadese John Charles Fields, da cui il nome.
Bombieri non è solo un grande matematico: ha numerosi interessi, visto che dipinge ritratti, legge poesie, cerca funghi e colleziona francobolli, conchiglie e ceramiche islamiche… e ha anche un grande senso dell'umorismo: sua è l'idea di un pesce d'aprile nel 1997, quando informa la comunità dei matematici che un fisico delle particelle ha risolto uno dei più grandi problemi di matematica (ancora irrisolto), l'ipotesi di Riemann.
A Odifreddi, che gli chiede come mai la matematica sia la "bestia nera degli studenti", risponde: "Mi sembra di notare in questi ultimi anni una diffidenza del pubblico verso la scienza in generale. La matematica, poi, non è mai stata la sua beniamina. Come diceva un mio amico: *Finché si insegnerà algebra nelle scuole, la gente continuerà a pregare*".
Ricorda anche altri aspetti, molto personali, legati alla ricerca matematica, sostenendo che essa non trova il suo senso solo nel raggiungimento delle grandi vette:

Alle grandi conquiste si arriva per piccoli passi,
per non parlare dei fallimenti, che alla fine indicano la retta via.

Per lui, un genio si distingue da un uomo normale grazie alla sua creatività ed il bello dei numeri è dato dalla loro universalità.

Nella vita di tutti i giorni non funziona mai niente,
nella matematica invece funziona sempre tutto.
Hans Magnus Enzensberger

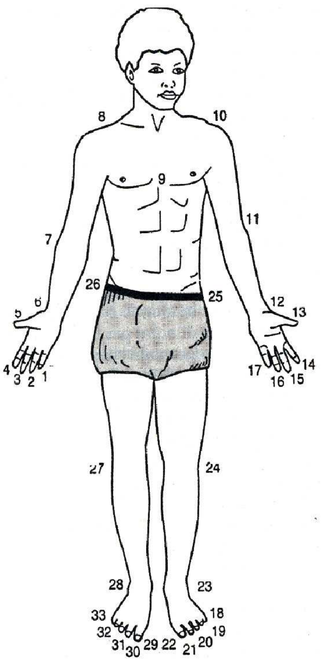
…I NUMERI

Originariamente la matematica nacque come un aspetto della vita quotidiana dell'uomo e l'odierna civiltà deve la sua sopravvivenza proprio allo sviluppo dei concetti matematici che hanno permesso il progredire della tecnologia.
Il concetto di numero deve essere sorto dalla consapevolezza delle somiglianze che legano tra loro i singoli oggetti: ad esempio, 5 papere e 5 rane hanno in comune la quantità, un concetto astratto che solo gradualmente l'uomo ha imparato a rilevare. Il "riconoscimento di una proprietà astratta che certi gruppi hanno in comune, e che chiamiamo numero, rappresenta un grande passo verso la matematica moderna". La consapevolezza del numero si è sviluppata gradualmente, forse nello stesso periodo in cui è stato scoperto il fuoco, circa 300.000 anni fa.
Di fronte alla necessità di scrivere i numeri, gli uomini di quasi tutto il mondo hanno adottato la stessa convenzione: usano la notazione posizionale in base 10 e le cifre arabe predominano in tutti i continenti. Ma non è sempre stato così e, per questo motivo, la numerazione orale è ben lontana da questa uniformità: le lingue contengono in sé alcuni modi di esprimere i numeri, che rappresentano veri e propri "fossili". La grande maggioranza delle lingue possiede una sintassi numerica fondata su una combinazione di somme e di moltiplicazioni:
- nella regione del Queensland, in Australia, gli aborigeni si limitano alla base 2
- nell'antico sumero, le basi 10, 20 e 60 si facevano concorrenza
- la base 20 compare nella numerazione azteca, maya, gallese e persiste tuttora in quella esquimese e yoruba[1]

[1] Gli Yoruba sono una popolazione dell'Africa occidentale, che abita attorno al fiume Niger. (Nigeria, Benin, Togo e Sierra Leone)

– il francese faceva uso della base 20, come si vede dalla parola “quatre-vingts”, ovvero “quattro venti”, cioè ottanta, ma anche “quatre-vingts-dix”, cioè “quattro venti e dieci”, cioè novanta
– ai tempi di Shakespeare, in Inghilterra, si contava per ventine.

Anche tra le lingue in cui la base 10 ha avuto la meglio, la sintassi resta molto variabile. I linguaggi più semplici, in assoluto, sono quelli asiatici, come il cinese, la cui grammatica si adatta perfettamente alla struttura decimale. Questo permette ai cinesi di avere una memoria a breve termine molto più ampia della nostra: essi riescono a memorizzare fino a nove cifre consecutive senza problemi, contro le sette degli inglesi e dei francesi. I nomi dei numeri influiscono in modo determinante anche nei conti e nel calcolo mentale e la differenza linguistica provoca nei bambini americani un ritardo di quasi un anno rispetto ai coetanei cinesi. Stanislas Dehaene in “Il pallino della matematica” parla di un collega italiano, residente da più di vent’anni negli Stati Uniti, quasi perfettamente bilingue. Quando deve eseguire un calcolo, però, “lo si sente borbottare i numeri nella sua lingua madre, l’italiano, come se non riuscisse a calcolare con facilità in inglese”.



Come è nato il numero?
Quando la nostra specie ha cominciato a parlare, forse sapeva indicare soltanto i numeri 1, 2 e 3, ovvero le quantità che il cervello percepisce senza sforzo e senza bisogno di contare. Pare che il passaggio verso una numerazione più evoluta passi attraverso il conto delle diverse parti del corpo. Se guardiamo i bambini, ci accorgiamo che in genere scoprono che alle dita della mano si possono far corrispondere gli oggetti da numerare.
Storicamente, si può dire che le dita e le altre parti del corpo siano servite a creare una specie di linguaggio corporale dei numeri, di cui si trova traccia in alcune società isolate. Gli abitanti delle isole dello stretto di Torres[2], ad esempio, indicano i numeri additando le diverse parti del corpo secondo un ordine immutabile, dal mignolo della mano destra fino alle dita del piede destro. (vedi figura a lato). Alcuni anni fa, in una scuola della Nuova Guinea, i docenti si meravigliavano nel vedere gli allievi aborigeni che si contorcevano durante le lezioni di matematica: toccando rapidamente le varie parti del corpo, i ragazzini traducevano nella gestualità della loro lingua i numeri e i calcoli che l’insegnante spiegava in inglese.
Ma il linguaggio corporale ha gravi limitazioni, visto che abbiamo solo dieci dita e la soluzione è l’invenzione di una sintassi particolare che ci permetta di forgiare i grandi numeri utilizzando serie di numeri più piccoli.
Per capire bene la storia della scrittura dei numeri, dobbiamo fare riferimento a tempi molto lontani. Molte ossa che risalgono al periodo aurignaziano (da 35.000 a 20.000 anni a.C.) portano incisi dei tagli paralleli, talora raggruppati in mucchietti. Infatti, i pastori che dovevano contare le pecore del gregge, al ritorno dopo una giornata passata al pascolo, avevano bisogno di uno strumento sicuro e affidabile. Magari tutto avrà avuto inizio ammucchiando dei sassolini, uno per ogni pecora all’uscita dal recinto e spostando i sassolini al ritorno del gregge, per verificare che non mancasse nessun animale. Ma il sistema era, per forza di cose, troppo inaffidabile: chiunque avrebbe potuto spostare quei sassi durante l’assenza del pastore! E poi, se il pastore avesse voluto contare le pecore durante il giorno? Non poteva certo portare con sé il mucchio di sassi. Perciò forse decise di indicare con delle tacche sul bastone ogni pecora e, per rendere più facile il procedimento, le raggruppò, magari in gruppi di cinque, come le dita di una mano. Raggruppando le incisioni, per l’uomo era sicuramente più facile fare delle incisioni per sbieco: forse nacquero così i simboli V e X, ovvero 5 e 10, nella notazione romana.
A dispetto della sua semplicità, questo metodo di notazione avviene mediante una corrispondenza biunivoca ed è un’invenzione importante, perché offre una rappresentazione dei numeri durevole, precisa e astratta. Una serie di intagli su un bastone costituisce un simbolo relativamente astratto, visto che la rappresentazione può indicare un insieme di elementi di qualsiasi tipo. In questo modo, l’uomo ha potuto liberarsi dei propri limiti.

L’ABACO

I Greci non furono in grado di produrre un sistema di numerazione che i posteri avrebbero conservato e i Romani non erano interessati alla speculazione intellettuale e fornivano solo formule pratiche. Perciò scrivevano, ad esempio:

$$\text{MCMLXXVI} = 1000 + (1000 - 100) + 50 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1976$$

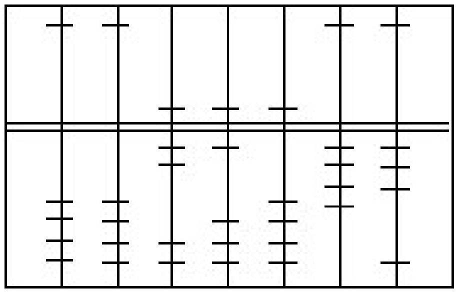
[2] Braccio di mare che si trova tra l’Australia e l’isola della Nuova Guinea

Le cifre romane, come indicato dal numero precedente, significano sempre la stessa cosa, in qualsiasi posizione si trovino, ma non sono certo adatte al calcolo! Operazioni complicate come la moltiplicazione sono apparentemente impossibili. Per calcolare il prodotto tra XIV e XXIII, i Romani usavano un espediente abbastanza complicato: dimezzavano la prima cifra, tralasciando i resti e raddoppiavano la seconda, disponendo i risultati nel modo seguente:

XIV	XXIII
VII	XLVI
III	XCII
I	CLXXXIV

A questo punto, non restava che sommare le cifre della seconda colonna, che si trovano all'altezza dei numeri dispari della prima colonna. In questo caso:

$$XIV \cdot XXIII = XLVI + XCII + CLXXXIV = CCXXII$$



Sembra un calcolo complicato… e lo è davvero, anche se i Romani erano in grado di svolgere tutte le operazioni necessarie grazie all'utilizzo dell'abaco.
L'abaco, inventato dai Romani, fu per millenni lo strumento di calcolo per eccellenza. Nel corso dei secoli, ne sono state elaborate diverse varianti, ma la sua forma originaria è riportata nella figura a fianco: una serie di aste di metallo, divise in due parti, una superiore più corta e una inferiore più lunga, da un listello. Nella parte superiore di ogni asta scorre una pallina di legno, in quella inferiore ne scorrono quattro. L'asta più a destra rappresenta le unità, poi ci sono le decine, le centinaia… e così via. Ciascuna delle quattro palline della zona inferiore vale un'unità, mentre quella della zona superiore ne vale cinque. Per inserire una cifra, si spinge la pallina verso il listello centrale, per un numero di palline corrispondente alla cifra che si vuole rappresentare. Fino alla cifra 4 si spingono verso il centro le palline di valore 1, mentre per le cifre superiori al 4 si spinge per prima la pallina di valore 5, aggiungendo poi quelle di valore 1. Ad esempio, il numero rappresentato è 76.543.
I poveri Romani, oltre a usare l'abaco, si servivano anche di sassolini, i *calculi*: la nostra parola "calcolo" viene infatti dalla parola latina *calculus*, che vuol dire sassolino, che ancora oggi mantiene una traccia di questa origine: i calcoli renali, ad esempio, sono dei sassolini calcarei. Nel calcolo i Romani avevano già sviluppato una certa idea della posizione, come è dimostrato dall'abaco. Ma non c'era lo zero.

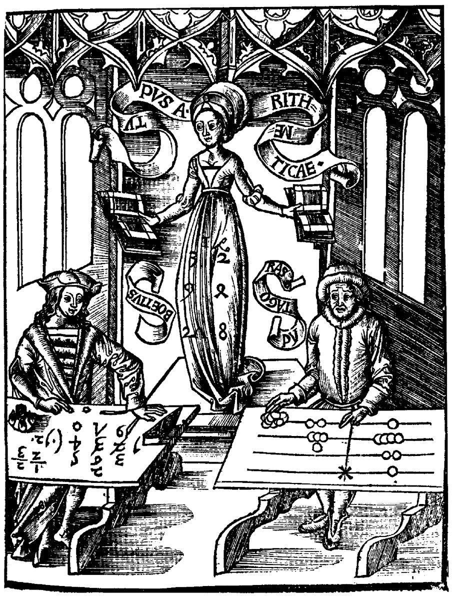
LO ZERO

L'1 e lo 0 sono i numeri più importanti inventati dall'uomo, ma ancora per parecchio tempo dopo la sua invenzione (e fu inventato molto tardi), lo 0 faticò ad essere considerato un numero. Ancora oggi è percepito come un numero diverso dagli altri: in effetti, lo studente medio incontra molte più difficoltà nell'operare con lo 0 che con gli altri numeri. Lo zero rimase comunque assente fino al periodo compreso tra il 300 a.C. e il 700 a.C., quando apparve sotto le spoglie di due cunei disposti obliquamente. In genere, si lasciava un posto vuoto laddove avrebbe dovuto esserci lo zero, perciò la spaziatura tra i raggruppamenti era di notevole importanza.
I Maya, con la loro civiltà che si è sviluppata dal terzo all'ottavo secolo e dal decimo al dodicesimo, hanno avuto un sistema di numerazione di tipo posizionale e lo zero, ingrediente essenziale del sistema, era rappresentato da simboli somiglianti a una conchiglia. Per gli Indiani, i numeri erano gli strumenti di una pratica profondamente virtuosa e, dopo la conquista di Dario e la spedizione di Alessandro, l'India fu esposta all'influenza dell'Oriente mesopotamico e agli influssi intellettuali dei Greci. Gli Indiani, trascrivendo simbolicamente l'abaco, acquisirono una straordinaria abilità nel calcolo numerico, non soltanto inventando il sistema di numerazione che attualmente utilizziamo, ma dando origine all'algebra e alla trigonometria. Gli Arabi, in seguito, fecero proprio il sapere degli Indiani e quando il Califfo al-Ma'mūn fondò a Baghdad la Casa del Sapere, ospitando eruditi da tutto il regno, ordinò di tradurre in arabo tutte le principali opere greche disponibili. Fra i dotti che il Califfo favorì nello studio ci fu il persiano Muhammad ibn Mūsa al-Khuwārizmī, che apportò numerosi e importanti contributi all'astronomia e alla matematica.
Il primo zero documentato al di là di ogni dubbio si trova in un tempio di Visnu a Gwalior, circa 400 km a sud di Delhi: su una lastra di pietra risalente all'876 viene usato due volte lo zero nella rappresentazione dei numeri 270 e 50.
Lo zero è una delle invenzioni più geniali dell'umanità, visto che semplificò il calcolo rendendolo meno soggetto a errori. Il nome arabo dello zero *sifr*, trasformato in *cifra* da Giordano Nemorario, fu scelto per rappresentare l'intero insieme delle dieci *cifre*, mentre la parola "zero" deriva dalla latinizzazione di *sifr* in *zephyrium*, come per indicare la qualità eterea di questa cifra.
Con l'introduzione dello zero, ampio spazio venne concesso alla notazione posizionale. Nel suo *Liber abaci* del 1202, Leonardo Pisano, detto Fibonacci, introdusse in Europa il nuovo sistema indoarabico, dando una definizione di estrema chiarezza:

> *Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus* [Le nove figure indiane sono 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure e con il segno 0, che gli arabi chiamano *zephirum*, è possibile scrivere qualsiasi numero].

Il padre voleva che Leonardo (nato a Pisa nel 1170 circa) diventasse un mercante e così provvide alla sua istruzione nelle tecniche di calcolo, specialmente nelle cifre indo-arabiche, che ancora non erano state introdotte in Europa. Intorno al 1200, dopo lunghi viaggi con il padre, Fibonacci tornò a Pisa, dove per venticinque anni lavorò alle sue opere matematiche. Il *Liber abaci*, contiene tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ebbe quindi una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale. In particolare, il sistema di numerazione indo-arabica fu introdotto in Europa proprio tramite questo libro. Fibonacci integra in quest'opera tutte le conoscenze acquisite durante il suo apprendistato.
La reputazione di Leonardo come matematico crebbe notevolmente, tanto che l'imperatore Federico II gli chiese un'udienza mentre era a Pisa nel 1225 e nel 1228 gli venne conferito il titolo di "*Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo*". Morì qualche tempo dopo il 1240, ma rimase talmente famoso, che attualmente esiste un'intera pubblicazione, il "*Fibonacci Quarterly*", dedicata all'aritmetica connessa alla serie di Fibonacci[3].

La notazione posizionale, ovvero il dare valore al posto di una cifra, era un'idea veramente complicata. Ma permise di semplificare di molto i calcoli.



Ai tempi delle lotte tra guelfi e ghibellini, vi fu un'altra lotta tra due diversi partiti, ma senza spargimento di sangue: i libri di storia, in genere, non ne parlano, ma ci fu un'aspra battaglia tra il partito degli abacisti e quello degli algoritmisti. La discussione era fra coloro che volevano seguitare a fare i conti con gli abaci e coloro che invece, come Leonardo Pisano, sostenevano che bisognava buttar via gli abaci e adottare l'algoritmo nuovo. Alla lunga, vinsero gli algoritmisti, ma ci vollero due secoli abbondanti perché la nuova numerazione si diffondesse e si imponesse completamente.
Nell'illustrazione a lato, comparsa nella *Margarita Philosophica* di Gregor Reysch, pubblicata nel 1503, viene rappresentata proprio questa battaglia. Una figura femminile impersona l'aritmetica e i suoi abiti sono adornati con le progressioni 2-4-8 e 3-9-27. Alla sua destra, il migliore dei due fianchi, è seduto Boezio, che ha eseguito con successo un'operazione usando le nuove cifre, mentre alla sua sinistra il povero Pitagora riflette sul risultato ottenuto con l'abaco, dove sono riportati i numeri 1241 e 82. In questa rappresentazione, gli algoritmisti sono difesi da Boezio, che visse nel VI secolo e viene considerato, erroneamente, il "padre" delle nove cifre.
In ogni caso, l'abaco non è stato completamente abbandonato, visto che a Mosca, Tokyo e Pechino, le commesse dei negozi fanno ancora i conti sul pallottoliere.

CURIOSITÀ

Il genio indiano Ramanujan collaborò a lungo con Hardy, grande matematico inglese. Durante la sua permanenza in Inghilterra, si ammalò e venne ricoverato in una casa di cura, situata in un sobborgo di Putney, pochi chilometri a sud-est di Londra, sulla riva destra del Tamigi. Qui Ramanujan era facilmente raggiungibile per Hardy, al quale bastava una corsa in taxi. Una volta, andando a trovare Ramanujan, Hardy annotò mentalmente il numero del taxi che lo stava portando a Putney, 1729 e, giunto dall'amico, lo definì un "numero piuttosto insulso" e aggiunse che magari si trattava di un cattivo presagio. Ma Ramanujan lo contraddisse, definendolo un "numero molto interessante. È il più piccolo numero esprimibile come somma di due cubi in due modi diversi", infatti:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$$

[3] 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233…

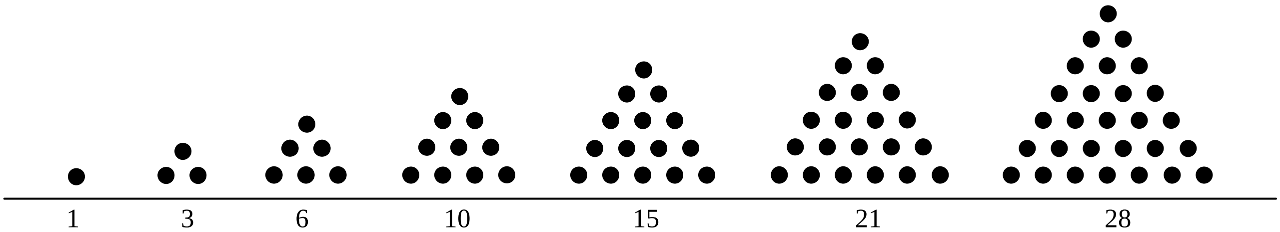
Il principe dei matematici, Gauss, si distinse fin da piccolo per la sua genialità. Alle elementari, il suo maestro, Büttner, assegnò alla classe il compito di addizionare tutti i numeri naturali da uno a cento. Ci sarebbero volute ore, ma Gauss si presentò quasi subito dal maestro con il suo risultato: 5050… che era ovviamente il risultato esatto.
Egli risolse il problema al volo, semplicemente riscrivendo i 100 numeri nel modo seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	50
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	…	51

La somma dei numeri, accoppiati in questo modo, è di 101 per ogni singola coppia. Siccome le coppie sono cinquanta, il risultato della somma dei primi 100 numeri naturali è: $101 \cdot 50$, ovvero 5050.

I NUMERI TRIANGOLARI E I NUMERI QUADRATI

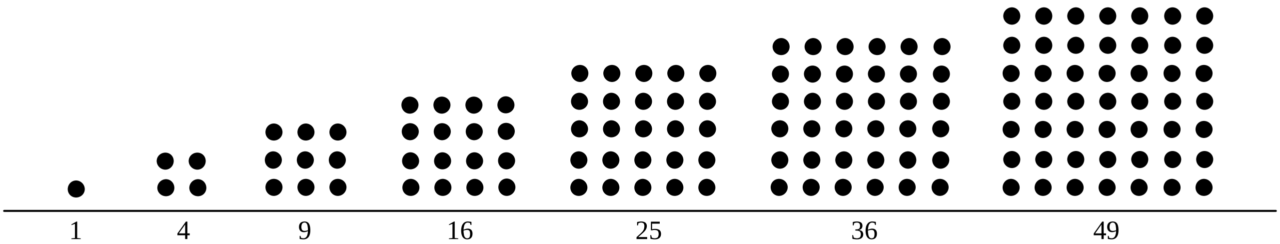
Secondo i pitagorici, i numeri si possono rappresentare anche in modo figurato. Ecco quindi una serie numerica particolarmente interessante, la serie dei numeri triangolari:



Se li sottraiamo due a due, otteniamo la serie dei numeri naturali:

3 – 1 = **2**; 6 – 3 = **3**; 10 – 6 = **4**; 15 – 10 = **5**…

Ma non è l’unica particolarità di questa serie. Sommando due numeri triangolari vicini, si ottiene un’altra simpatica serie:



Infine i numeri triangolari si prestano a un calcolo molto rapido: per sommare i numeri da 1 a 12, ad esempio (per tornare al problema di Gauss), basta contare i numeri triangolari e prendere il 12°. In altre parole, con un piccolo trucco tutti noi possiamo competere con Gauss…

BIBLIOGRAFIA
Albrecht Beutelspacher, *Matematica da tasca*, Ponte alle grazie, Milano 2002
Stanislas Dehaene, *Il pallino della matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milano 2000
Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Franco Muzzio Editore, Trento 2003
Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Cuneo 1998
Piergiorgio Odifreddi, *Incontri con menti straordinarie*, Longanesi, Milano 2006
Midhat Gazalé, *Il numero*, edizioni Dedalo, Bari 2001
Robert Kanigel, *L’uomo che vide l’infinito*, Rizzoli, Milano 2003
Daniel Kehlmann, *La misura del mondo*, Feltrinelli, Milano 2006
Hans Magnus Enzensberger, *Il mago dei numeri*, Mondadori, Torino 1997