Un matematico che non abbia un po' del poeta,
non può essere un perfetto matematico.
K.W.T. Weierstrass

BREVE STORIA DELLE FUNZIONI

Consideriamo l'insieme della parole contenute in un vocabolario della lingua italiana. Le parole sono *ordinate*, secondo l'ordine alfabetico delle iniziali e sono *divise in classi*, ovvero in sottogruppi (le parole che iniziano per A, quelle che iniziano per B… e così via). L'organizzazione di questo insieme passa attraverso le RELAZIONI. Di relazioni parliamo comunemente nella vita quotidiana: la temperatura di una località è in relazione con la sua altitudine, la velocità di un'auto è in relazione con la sua cilindrata, il prezzo della benzina è in relazione con quello del petrolio.
Kenneth Arrow (1921, -), uno dei maggiori economisti del mondo, nonché uno dei primi vincitori del premio Nobel per l'economia (Arrow fu insignito del premio nel 1972 ed esso fu istituito nel 1969), capì che la teoria economica del consumatore si poteva enunciare in termini di relazioni d'ordine: "Non vedo come si possa discutere delle scelte, sociali o individuali, senza usare i concetti della teoria delle relazioni". Quando esiste una relazione tra due oggetti, la conoscenza di uno dei termini fornisce un'informazione, più o meno precisa, sull'altro termine.
La definizione che noi daremo di relazione è: "Dati due insiemi A e B non vuoti, si dice relazione tra l'insieme A e l'insieme B, un predicato a due variabili $r(x, y)$ avente senso per $x \in A$ e $y \in B$."
Se i due insiemi li consideriamo costituiti ad esempio l'uno dagli alunni della scuola (insieme A) e l'altro dalle classi della scuola (insieme B), possiamo dire che un elemento dell'insieme A è in relazione con un elemento dell'insieme B se l'alunno in questione appartiene alla classe considerata.

Per quanto riguarda il concetto di funzione, da quando è stato introdotto, ha cambiato radicalmente l'essenza stessa della matematica. La forma di una diga dipende dallo studio di funzioni relative alle singole variabili che intervengono; i frattali, l'espressione della matematica più legata all'arte, sono frutto di studi di funzioni; la fisiologia è uno dei campi nei quali si è utilizzato il concetto di funzione… ma possiamo fare anche esempi più semplici: l'area di un triangolo è funzione della misura dei suoi lati. L'esempio più classico delle funzioni sono le leggi fisiche: sono proposizioni relative al modo in cui certe quantità dipendono da altre quando si fanno variare alcune di esse, ad esempio la variazione della velocità rispetto al tempo trascorso e allo spazio percorso, nell'ambito del moto accelerato.
Lo studio delle funzioni germogliò dal tentativo di capire e chiarire un certo numero di strane scoperte fatte nel XIX secolo, perciò non è facile riuscire a collocare in un particolare periodo storico la nascita delle funzioni.
I primi a trattare il concetto di funzione furono Pierre de Fermat e Renè Descartes.
Pierre de Fermat (1601-1665) è definito da E.T. Bell il "re dei dilettanti". Creatore nato, ha avuto una vita calma e laboriosa, senza avvenimenti importanti. Per diciassette anni è stato consigliere del Re al Parlamento di Tolosa e, nel complesso, ha prestato allo Stato trentaquattro anni di un servizio caratterizzato da onestà ed equilibrio.
Renè Descartes (1596-1650) proviene da una nobile famiglia. Rimasto precocemente orfano di madre, a causa della sua salute delicata è stato oggetto di un trattamento privilegiato anche da parte dei Gesuiti, presso i quali ha studiato durante la sua giovinezza. Gli concedevano, ad esempio, di passare le sue mattinate a letto: proprio durante queste mattine, Descartes ideò le sue teorie filosofiche e matematiche: il 10 novembre 1619, giorno in cui nacque in lui l'idea della geometria analitica (il piano cartesiano deve a lui il suo nome) è indicato come la data della nascita della matematica moderna. Purtroppo la sua morte è da attribuire alle "pretese" della Regina Cristina di Svezia, che non voleva concedere a Descartes le sue mattinate a letto, ritenendo che le cinque del mattino fossero l'orario migliore per studiare la filosofia.
Nel 1667, James Gregory (1638-1675) diede la prima definizione di funzione. Nella sua opera *Vera circoli et hyperbolae quadratura* definisce la funzione come una quantità ottenuta da altre quantità mediante una successione di operazioni algebriche o con qualsiasi altra operazione immaginabile. Il suo concetto è stato perso di vista, in quanto considerato troppo ristretto. Qualcosa di simile è avvenuto anche per il resto del suo lavoro: scarsamente noto ai contemporanei, venne riscoperto nel 1939, quando H.W. Turnbull curò un volume celebrativo del tricentenario della sua nascita.
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) usò per primo il termine "funzione" nell'opera *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuovo metodo per trovare i massimi e i minimi, e anche le tangenti, non ostacolato da quantità irrazionali). Qualche anno prima, nel 1655, il suo rivale nello studio del calcolo differenziale, Isaac Newton (1642-1727) aveva parlato di funzione, ma chiamandola "fluente". Nel 1673, Leibniz parlò di funzione intendendo una quantità che varia da punto a punto di una curva e la curva è data da un'equazione. Allo stesso tempo introdusse i termini di "costante", "variabile" e "parametro". Nel 1714, nell'opera *Historia*, definì la funzione come una quantità che dipende da una variabile. La matematica fu solo uno dei campi in cui Leibniz espresse il suo genio: si occupò anche di diritto, religione, politica, storia, letteratura, logica, metafisica e filosofia speculativa. Fu un pioniere nel campo della logica: fu artefice del "*calculemus*" e del sistema binario che portarono all'invenzione degli attuali calcolatori. "Si può dire che Leibniz abbia vissuto, non una vita, ma parecchie", come sostiene E.T. Bell.

Nel 1829, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) diede una definizione più ampia di funzione: "Una variabile y si dice funzione della variabile x in un certo intervallo, quando esiste una legge, di natura qualsiasi, la quale faccia corrispondere a ogni valore dato alla x un valore e uno solo per la y". Amico di Gauss, nel 1855 gli successe nella cattedra di matematica all'Università di Gottinga. Sviluppò più di ogni altro i contenuti delle *Disquisitiones*, l'opera più importante di Gauss, ma legò il suo nome a dei risultati importanti sulle serie e ad altri problemi di matematica applicata. La funzione di Dirichlet presenta un'affinità con l'idea moderna di corrispondenza tra due insiemi di numeri.
Lo studio rigoroso dell'analisi cominciò con l'opera di Bolzano, Cauchy, Abel e Dirichlet e fu poi proseguito da Weierstrass. Lo studio delle funzioni aumentò sia in termini di varietà che di uso e questo costrinse i matematici ad accettarne un concetto più ampio. Lagrange (1736-1813) usò il termine funzione per quasi ogni tipo di dipendenza da una o più variabili e l'opera di Fourier (1772-1837) ampliò ancora di più il problema di che cosa sia una funzione.
Nel 1878, Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) diede un'ulteriore definizione di funzione, diversa da quella attuale e anche da quella di Dirichlet. L'opera di Weierstrass nella rigorizzazione dell'analisi migliorò quelle precedenti di Bolzano, Abel e Cauchy. La compì negli anni dal 1841 al 1856, quando era insegnante di liceo. La sua carriera fu soprattutto quella di un insegnante delle superiori, forse anche a causa del contrasto che ebbe con il padre, che voleva avviarlo al commercio e alla giurisprudenza. Ma come insegnante fu davvero speciale: le sue lezioni erano modelli di perfezione e furono molti i suoi studenti che diventarono dei matematici creatori. Le sue idee creatrici furono concepite anche se non poteva procurarsi i libri che gli occorrevano e non poteva tenere la minima corrispondenza scientifica, a causa del prezzo proibitivo dei francobolli. Alla comparsa di una sua memoria sul *Giornale di Crelle*, un periodico dedicato specificamente alla matematica, fu consacrato grande matematico all'Università di Koenisberg. Il ministro della Pubblica Istruzione lo promosse immediatamente e gli accordò un congedo di un anno perché potesse continuare i suoi lavori scientifici, ma Weierstrass non si montò la testa, nonostante tutti gli onori. Dal 1° luglio 1856 fu nominato professore aggiunto all'Università di Berlino ed eletto membro dell'Accademia berlinese.
Nella storia delle funzioni, non può certo mancare Bourbaki: il nome è in realtà uno pseudonimo che indica, dal 1935, un gruppo di matematici. Il nome deriva da quello di un generale francese al servizio di Napoleone III, noto per non aver mai perso una battaglia. I matematici erano: Henri Cartan, Jean Del Sarte, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, Szolem Mandelbrojt, René del Possel e André Weil. Essi avevano come obiettivo quello di rifondare l'intero edificio della matematica, basandosi sulle strutture, e scrivendo una versione aggiornata del *Cours d'analyse* di E. Goursat. Ma un secondo obiettivo, forse meno nobile, fu quello di prendersi gioco dei matematici "parrucconi": infatti, facevano tenere le loro conferenze a un attore, adeguatamente istruito, che risultava professore dell'Université de Nancago (=Nancy+Chicago). Il progetto si trasformò in quello della pubblicazione di un'opera, gli *Eléments de mathématique*, i cui fascicoli sono usciti con regolarità fino all'incirca al 1983, ma non hanno realizzato l'obiettivo fondamentale che ha portato alla nascita del gruppo.
Nel 1939, Jean Dieudonné diede una nuova definizione di funzione: "*Siano E e F due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di funzione all'operazione che così associa ad ogni elemento x di E l'elemento y di F, che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata*".

LA CURVA DI GAUSS E LA PROBABILITÀ:

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) è da considerarsi il più grande matematico di tutti i tempi. Famoso è l'episodio, emblematico della sua genialità, nel quale, durante una lezione a scuola, il maestro diede agli alunni da eseguire la somma dei primi 100 numeri naturali. Egli risolse il problema al volo, semplicemente riscrivendo i 100 numeri nel modo seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	…

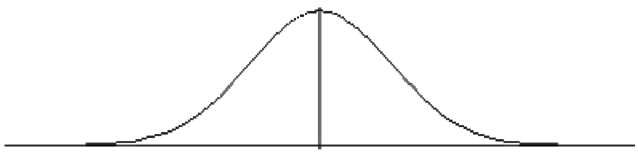
La somma dei numeri, accoppiati in questo modo, è di 101 per ogni singola coppia. Siccome le coppie sono cinquanta, il risultato della somma dei primi 100 numeri naturali è: $101 \cdot 50$, ovvero 5050. In altre parole, Gauss trovò la formula:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Ma non fu il solo risultato importante… La sua vocazione matematica si consolidò quando aveva diciannove anni: fu proprio allora che scoprì che si poteva costruire un poligono di 17 lati, usando riga e compasso. La scoperta del poligono fu molto cara a Gauss: tanto cara che egli volle che sulla sua lapide mortuaria fosse inciso il poligono regolare di 17 lati. Lo scalpellino incaricato rifiutò però la commissione, perché sosteneva che l'incisione sarebbe stata quasi indistinguibile da quella di un cerchio.

La funzione della quale vogliamo parlare è la curva che descrive la distribuzione della probabilità:

$$y = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2 h^2}$$

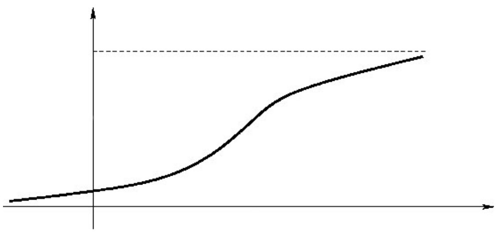


Considerando una qualsiasi applicazione statistica, la curva ne rappresenta la distribuzione. Se consideriamo, ad esempio, delle misurazioni fisiche, effettuate con uno strumento dal grado di precisione abbastanza elevato, si otterranno delle misurazioni diverse, ma che si distribuiscono nello stesso modo indicato dalla curva. La curva di Gauss è una spiegazione anche della distribuzione delle code ai caselli dell'autostrada: le auto tendono ad andare sempre al casello centrale, disdegnando i caselli laterali.

Qualsiasi sia il problema considerato, dal lancio di una moneta alla propagazione di una malattia, non possiamo dire nulla riguardo all'esito, ma possiamo, considerando una popolazione molto numerosa, applicare questa distribuzione statistica per capire come potrebbero presentarsi gli eventi nel loro complesso.

LA FUNZIONE LOGISTICA E L'ACCRESCIMENTO DELLA POPOLAZIONE:

Il matematico belga Pierre François Verhulst (1804-1849), nel 1838, determinò la legge di accrescimento di una popolazione. Le ipotesi assunte furono che la popolazione tende ad aumentare, mentre l'ambiente esterno esercita un freno, proporzionale al quadrato della popolazione stessa. La funzione logistica si esprime come segue:



$$P(t) = \frac{\frac{h}{k}}{1 + C e^{-ht}}$$

La curva indica che inizialmente la popolazione cresce esponenzialmente e poi, man mano che si avvicina al valore massimo, la crescita comincia a diminuire finché non raggiunge un valore stabile.

La validità della formula fu provata nel 1920 da due studiosi americani di demografia, Pearl e Reed. Al di là della demografia, la funzione trova applicazione anche in altri campi, teorici e sperimentali, come può essere, ad esempio, la diffusione di una malattia.

ALCUNE DIFFERENZE TRA MATEMATICI E FISICI

Il concetto di funzione, come abbiamo visto, è della massima importanza non solo in matematica, ma anche nelle applicazioni pratiche, ad esempio nelle leggi fisiche. Il concetto di funzione permette di caratterizzare un moto in modo matematicamente esatto, visto che la funzione è una legge secondo la quale quantità variabili dipendono l'una dall'altra. Il matematico ha interesse soltanto alla forma della relazione tra le due variabili, ovvero all'operazione matematica che si compie. Il fisico, invece, è interessato al risultato, non alla formula.

BIBLIOGRAFIA

M. Scovenna, A. Moretti, *Aspetti di Algebra I*, Cedam, Padova, 2002
M. Scovenna, *Insiemi, Logica, Relazioni, Funzioni*, Cedam, Padova, 2001
N. Dodero, P. Barboncini, R. Manfredi, *Nuovi lineamenti di matematica*, Ghisetti e Corvi Editori, vol. 1, Milano 2006
M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Biblioteca Einaudi, Torino, 1999
Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Franco Muzzio Editore, Roma, 2003
Luciano Cresci, *Le curve celebri*, Franco Muzzio Editore, Aries 1998
R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Universale Bollati Boringhieri, Torino 1971
G. Spirito, *Matematica senza numeri*, Tascabili Economici Newton, Roma, 1995
Piergiorgio Odifreddi, *Incontri con menti straordinarie*, Longanesi, Milano 2006
E. T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni Editore, Milano, 1997
Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore, Cuneo, 1998