

La ricerca di un problema di matematica assomiglia spesso alla soluzione di un enigma poliziesco. E l'Algebra viene in soccorso del ricercatore introducendo delle lettere al posto di ciò che non si conosce.

A. Deledicq

IL PADRE DELL'ALGEBRA

Abbiamo già visto (cfr. I numeri) che il nostro modo di indicare i numeri, di operare con essi e, in generale, di fare i calcoli, non risale agli antichi greci, per quanto abbiano fatto della matematica uno degli ambiti dei loro studi, ma agli arabi, che diffusero le cifre indiane. Eppure il termine "aritmetica" è di origine greca e significa scienza dei numeri. Non altrettanto si può dire del termine algebra, notoriamente di origine araba.

L'algebra non è una scienza tanto antica e oggetto di questa relazione sarà proprio la paternità di questa scienza.

Cominciamo dalla definizione di algebra: non è certo facile dare definizioni generali e se oggi ne chiedessimo una descrizione a uno studioso di questo ambito, egli sarebbe molto imbarazzato, tali e tanti sono stati gli sviluppi di questo ramo della matematica negli ultimi cento anni. Se domandassimo la stessa cosa a al-Khowârizmî, del quale parleremo in seguito, non avrebbe alcun problema a spiegarci cosa sia per lui l'algebra, visto che per lui coincide con una regola usata nella soluzione delle equazioni.

Per L.L.Radice, l'algebra è "il ramo della matematica che studia le uguaglianze, e in particolare le uguaglianze che contengono delle grandezze incognite, uguaglianze che possono essere verificate o no a seconda dei valori che si danno alle grandezze incognite". Ma non crediamo che la definizione dell'algebra sia una cosa così marginale: in *Storia dell'algebra*, Maracchia apre con un elenco di definizioni. Se nel primo significato l'algebra è una generalizzazione dell'aritmetica, nata dalla necessità di rendere generali i procedimenti da eseguire, nel corso dei secoli ne sono state le definizioni più diverse:

- Al-Karaji (X-XI sec): "determinazione di incognite a partire da premesse conosciute.
- As-Samaw'al (XII sec): "operare su [quantità] incognite per mezzo di tutti gli strumenti aritmetici, come l'aritmetica sulle [grandezze] note".
- Omar Khayyam (XI-XII sec): "Io dico che l'Algebra è un'arte scientifica. Gli oggetti di cui si occupa sono numeri assoluti e grandezze misurabili che, sebbene in sé sconosciute, sono collegate con cose note per cui è possibile la determinazione delle quantità incognite".
- Matematici indiani: algebra come Vijaganita, titolo di un'opera di Bhaskara, che significa "scienza di calcolo con le incognite".
- F. Viète (1540-1603): "Un'equazione è dunque un'eguaglianza (*comparatio*) tra una grandezza incognita (*incerta*) e una grandezza nota (*certa*)".

Alcuni anni fa, nelle pagine della rivista *Archive for history of exact sciences*, scoppiò una vivace polemica proprio sulla definizione di algebra, che per alcuni studiosi è solo quella astratta, mentre per altri anche l'algebra antica può essere considerata tale. Il contrasto nasce proprio da una diversa idea di algebra: in realtà, possiamo cominciare a parlare di algebra dalle epoche più remote, da quando, cioè, pur non chiamandosi ancora "algebra", l'atteggiamento e la tecnica di risoluzione avevano ugualmente caratteristiche algebriche.

Nell'evoluzione dell'algebra, Maracchia riconosce sei tappe:

1. Nasce uno "spirito algebrico": si ha bisogno del concetto e del segno di uguale
2. Generalizzazione: le regole cominciano a prendere una loro espressione retorica, anche se non vi è piena consapevolezza di quanto si fa
3. Nascono segni particolari per indicare le incognite
4. Si raggiunge la consapevolezza di una matematica intesa come astratta manipolazione di simboli e relazioni.
5. Estensione del campo numerico e distacco dalla corrispondenza "reale".
6. Le varie operazioni che si compiono nei passaggi algebrici vengono esaminate e successivamente assiomatizzate.

Un'ulteriore evoluzione dell'algebra si può riconoscere nel suo linguaggio. Si ritiene infatti generalmente che nello sviluppo storico dell'algebra siano riconoscibili tre stadi:

- Stadio retorico: tutto viene scritto completamente a parole
- Stadio "sincopato": vengono adottate alcune abbreviazioni
- Stadio simbolico: lo stadio dell'algebra più matura

I primi documenti e i primi problemi algebrici

Il più antico documento di probabile significato algebrico risale ad una civiltà riportata alla luce nel 1975 da una spedizione italiana: la civiltà di Ebla, città dell'attuale Siria. La tavoletta scritta in cuneiforme TM 75 G 1693 trovata negli scavi, decifrata da Giovanni Pettinato e interpretata dal matematico Tullio Viola e dalla sua allieva Isabella Vano, è stata scritta da un certo Jsmaja¹, scriba di Kis, città sumera della Mesopotamia. Probabilmente si trattava di un'esercitazione nella quale viene richiesto per quale numero deve essere moltiplicata la base 60 della numerazione sumera per ottenere i vari numeri presentati.



“Ormai possiamo dire che l'algebra alla metà del III millennio a.C. era già nota, e lo era insieme al concetto di operazione”, come sostengono Viola e Vano.

Ci sono anche problemi algebrici molto antichi. Ad esempio, il quesito dell'asino e del mulo, riportato nell'*Antologia Greca*, tra gli Epigrammi raccolti da Metrodoro e attribuito a Euclide:

*Un asino e un mulo viaggiavano insieme, portando un carico di sacchi di grano (o otri di vino). L'asino si lamentava per il carico eccessivo. Il mulo gli disse: “Di che cosa ti lamenti? Se tu mi dessi uno soltanto dei tuoi sacchi, io ne avrei il doppio di te. Ma se io ti dessi uno dei miei sacchi, ne avremmo tanti uguali.”. Dimmi, o sapiente lettore, quanti sacchi portava l'asino e quanti il mulo?”*²

Il problema si può facilmente risolvere con il seguente sistema, che traduce il problema enunciato:

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases}$$

Che dà come soluzione: sette sacchi per il mulo e cinque per l'asino.

Di epoca successiva è il *Problema dei buoi*, attribuito ad Archimede, che mostra uno spirito algebrico e indica il notevole livello ormai raggiunto dalla matematica greca. Il problema fu trovato da Archimede, che lo riportò, sotto forma di epigramma, in una lettera destinata ad Eratostene ed a coloro che in Alessandria si occupano di questi argomenti:

Amico, se tu hai la sapienza di calcolare, determina accuratamente il numero dei buoi del (dio) Sole che una volta pascolavano nelle pianure dell'isola di Sicilia Trinacria, divisi in quattro greggi di diverso colore: il primo (color) bianco latteo, il secondo nero lucente, il terzo bruno e il quarto chiazzato. Ciascuno di questi gruppi era formato da un numero considerevole di tori ripartiti secondo le seguenti proporzioni: immagina, amico mio, che i bianchi erano in numero uguale alla metà aumentata di un terzo dei tori neri e più inoltre i tori bruni; i tori neri erano in numero uguale alla quarta e quinta parte dei chiazzati e accresciuti dei tori bruni. Considera inoltre che i chiazzati erano in numero uguale alla sesta più la settima parte dei tori bianchi e più inoltre i tori bruni.

Le giovenche poi erano ripartite nel modo seguente: le bianche erano in numero uguale alla terza più la quarta parte di tutto il gregge nero; le nere erano in numero uguale alla quarta più quinta parte delle giovenche chiazzate prese insieme ai tori (chiazzati) e le chiazzate erano, poi, in numero uguale alla quinta più la sesta parte di tutto il gregge bruno e, infine, le (giovenche) brune erano in numero uguale alla metà della terza parte più la settima parte del gregge bianco.

Amico, se tu mi dici esattamente quanti buoi aveva il Sole, qual era in particolare il numero dei tori e quello delle giovenche per ciascun colore, non ti si potrà qualificare né ignorante né inabile in materia di numeri; ma tu non potrai ancora essere considerato tra i sapienti. Ma ora, osserva ancora le diverse proporzioni in cui erano disposti i buoi del Sole: allorché i tori bianchi si univano ai neri essi formavano un gruppo completo avente la stessa misura sia in lunghezza che in larghezza e questo quadrato riempiva interamente le immense pianure della Trinacria. Inoltre tutti i (tori) bruni uniti a tutti i chiazzati, senza (tori) di altro colore, riuniti in modo che essendo la prima fila costituita da uno solo, (la seconda da due, la terza da tre...), essi formavano gradualmente una figura triangolare.

Amico, se tu troverai del pari tutte queste cose e se insomma troverai tutti i numeri (richiesti) di tali gruppi, potrai gloriarti di aver vinto e persuaso che ti si giudicherà completamente addentro in questa scienza.

Il problema era già stato esposto in forma semplice da Omero nell'*Odissea* (XII, 164-168) e Archimede l'ha generalizzato senza riuscire a risolverlo. Il computer ha permesso di determinare, nel 1965, che la soluzione è un numero di oltre centomila cifre! Troppo grande perché chiunque potesse trovarlo a mano.

¹ Potrebbe essere il nome del primo matematico a noi noto...

² Cfr.: <http://digilander.libero.it/basecinque/numeri/asimulo.htm>

L'algebra greca

Proprio Archimede, autore del *Problema dei buoi*, è morto per mano di un soldato romano: la sua morte può essere stata accidentale, ma può essere stata premonitrice. Lungo l'arco della sua lunga storia, Roma diede infatti scarsi contributi alla scienza o alla filosofia e ancor meno alla matematica, nonostante i grandiosi progetti di ingegneria e i monumenti architettonici. È pur vero che la matematica dei romani era a un livello notevolmente inferiore a quello della matematica greca degli stessi anni. La matematica greca non si mantenne sempre a un livello elevato: al periodo glorioso del III secolo a.C. fece seguito un declino, che si arrestò, forse, in qualche misura al tempo di Tolomeo.

Già nel I sec. d.C., in Grecia si risvegliò l'interesse per l'algebra. Cominciarono ad apparire libri di problemi che venivano risolti con tecniche algebriche e alcuni di essi erano proprio gli stessi che comparivano nei testi babilonesi del 2000 a.C. o nel papiro di Rhind³. Nel secolo dell'*Età argentea*, dal 250 al 350 d.C., noto anche come Tarda Età alessandrina, troviamo il più grande algebrista greco, Diofanto di Alessandria. Alessandria era un centro cosmopolita e la matematica prodotta dagli scienziati alessandrini non era tutta di uno stesso tipo e l'opera di Diofanto presenta un deciso allontanamento dalla tradizione della matematica classica. Della sua vita non sappiamo nulla, se non quanto ci viene detto dall'*Antologia Greca*, la raccolta di problemi risalente al V o VI secolo:

Dio gli concesse di rimanere fanciullo per un sesto della sua vita, e trascorso un altro dodicesimo, Egli gli coperse le guance di peluria; dopo un settimo della sua vita Egli si accese la fiaccola del matrimonio, e cinque anni dopo il matrimonio gli concesse un figlio. Purtroppo questo bambino nato dopo tanto tempo fu sfortunato: dopo aver raggiunto la metà della vita di suo padre, fu portato via da un Destino crudele. Dopo aver consolato il proprio dolore con la scienza dei numeri per quattro anni, pose termine alla propria vita.

Il problema si può facilmente risolvere con un'equazione di primo grado: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$.

Ma non va considerato come tipico dei problemi di Diofanto, dato che questi rivolse scarsa attenzione alle equazioni di primo grado.

A Diofanto viene spesso dato l'appellativo di padre dell'algebra, ma forse l'appellativo non è completamente meritato. La sua opera prevale su quella di tutti i suoi contemporanei, ma sfortunatamente essa venne troppo tardi per avere grande influenza sulla sua epoca: un'ondata di distruzione stava già per sommergere la civiltà alessandrina.

La più grande opera di Diofanto è l'*Arithmetica*, tredici libri dei quali ci sono pervenuti solo i primi sei. Più di centocinquanta problemi tutti formulati in termini di esempi numerici specifici, probabilmente (come indica la dedica) una serie di esercizi per aiutare uno degli studenti a impadronirsi dell'argomento. Non c'è uno sviluppo a partire da postulati, né viene fatto alcuno sforzo per trovare tutte le possibili soluzioni. L'*Arithmetica* non è un manuale di algebra, ma una raccolta di problemi e in questo Diofanto è simile agli algebristi babilonesi, anche se i suoi numeri sono interamente astratti, non si riferiscono né a entità monetarie, né a quantità di grano o dimensioni di terreni ed inoltre egli si interessava solo di soluzioni esatte. L'opera è caratterizzata da un *alto grado di raffinatezza e ingegnosità matematica* e può essere paragonata ai grandi classici della prima Età alessandrina: rappresenta una nuova branca matematica e fa uso di un metodo diverso. La grande innovazione di Diofanto consiste nella notazione abbreviata e la sua algebra è detta "sincopata", e in questo differisce dalle algebre precedenti di origine babilonese o egiziana, dette retoriche: in questo, può essere considerato il padre dell'algebra. Ma non per quanto riguarda la struttura dell'opera e il suo modo di affrontare i problemi. Infatti l'opera è una raccolta di problemi staccati, che manca di metodi generali: ciascuno dei problemi viene risolto con un metodo diverso, non viene fatto nessun tentativo di classificarli per tipo.

Per l'incognita usava la lettera ς , forse la sigma greca usata alla fine della parola, che potrebbe essere stata scelta perché non rappresentava alcun numero nel sistema greco in cui i numeri venivano denotati mediante le lettere dell'alfabeto.

La sua opera, nel complesso, costituisce un monumento nel campo dell'algebra, ma egli non può essere considerato il padre dell'algebra. È più giusto legare la sua paternità all'analisi diofantea, ovvero allo studio delle equazioni indeterminate.

L'algebra araba

L'era islamica inizia il primo anno del suo calendario nel 622 e nel volgere di pochi secoli gli islamici conquistano e dominano un impero sterminato, i cui confini si estendono dal fiume Indo in Asia, all'Ebro in Spagna. Fra il 622 e il 945 conquistano territori dall'Asia all'Europa, dall'Africa settentrionale alla Spagna.

³ Scoperto da Henry Rhind nel 1858 e conservato ora al British Museum, il papiro Rhind è anche noto come papiro Ahmes dal nome del suo autore, che lo inizia con le parole "Regole per ottenere la conoscenza di tutte le cose oscure". Risale al 1700 a.C. circa e fu scritto da scribi che erano impiegati dello Stato egiziano e di amministrazioni religiose. Contiene 85 problemi, con le relative soluzioni. È molto probabile che i problemi fossero intesi come esempi di problemi e di soluzioni tipiche. La matematica ivi contenuta era nota agli Egiziani fin dal 3500 a.C. e poche aggiunte vi vennero apportate da allora fino all'epoca della conquista greca.

Il primo secolo dell'impero musulmano fu privo di qualsiasi conquista scientifica e proprio in questo periodo fu raggiunto il livello più basso nello sviluppo della matematica: gli arabi non avevano ancora raggiunto iniziative intellettuali e nelle altre parti del mondo l'interesse per il sapere si era molto affievolito.

Con la dinastia degli Abbasidi, gli arabi raggiungono un alto livello intellettuale e un grande sviluppo delle scienze. Dopo il periodo della conquista, contrassegnato dal fanatismo religioso, gli arabi trattarono bene le popolazioni e le altre comunità religiose, tant'è vero che gli infedeli poterono lavorare liberamente.

La matematica che nei secoli VII e VIII era considerata unicamente per la soluzione di problemi pratici, quindi per la sua utilità, grazie al mecenatismo dei califfi Giafar al-Mansûr, Harûn al-Rashîd e Abdallah al-Ma'mûn conosce tra il IX e il XIII secolo un periodo di straordinaria fioritura. Quest'epoca d'oro prende il via grazie allo studio e all'assimilazione delle opere dei greci, degli indiani e delle culture dei popoli conquistati. Dopo il 750 molti scienziati, filosofi e traduttori dalla Siria, dalla Persia e dalla Mesopotamia sono chiamati a Baghdad, la "città della pace" fondata da al-Mansûr, destinata a diventare la nuova capitale della cultura, la nuova Alessandria. Anche la sua posizione geografica contribuisce a farne il centro del potere, sia politico che culturale.

Con il califfato di al-Ma'mûn (809/833), che continuò l'opera del padre, gli arabi diedero libero sfogo alle traduzioni: si racconta che il califfo al-Ma'mûn avesse fatto un sogno in cui gli era apparso Aristotele, e che in seguito a ciò avesse deciso di fare tradurre in arabo tutte le opere greche che fosse riuscito a trovare. Intorno all'800 gli Arabi erano già entrati in possesso di una copia degli *Elementi* di Euclide (che già al-Mansûr aveva chiesto ai bizantini come indennità o bottino di guerra), che si affrettarono a tradurre, la *Sintassi matematica* di Tolomeo fu tradotta nell'827 come *Almagesto*, che significa "l'opera più grande", a segno della grande considerazione di cui godeva. Gli Arabi si dedicarono a migliorare le traduzioni già esistenti e scrissero dei commentari, ma l'attività di traduzione dei testi greci fu praticata non da linguisti, bensì da matematici: questo dimostra che non era un'attività fine a se stessa, bensì il necessario corollario dell'attività scientifica che si svolgeva in Baghdad.

Verso l'830 al-Ma'mûn fonda a Baghdad la "casa della saggezza", in arabo Bayt al-Hikma, dotata di una ricchissima biblioteca, paragonabile a quella del museo di Alessandria⁴, dove dimorano studiosi, scienziati e molti traduttori. Questi ultimi hanno il compito di volgere dal greco i testi classici scientifici e filosofici.

Proprio alla corte di al-Ma'mûn, troviamo l'astronomo Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (in arabo: محمد بن موسى خوارزمي) (780/850 ca), il vero padre dell'algebra, o perlomeno del termine che la contraddistingue. La parola algebra, infatti, proviene da un libro da lui scritto nell'830, intitolato *Al-jabr w'al muqâbala*. La parola al-jabr significa

"ristabilire", ovvero ristabilire l'equilibrio in un'equazione scrivendo in un suo membro un termine che era stato eliminato dall'altro membro, mentre al muqâbala significa "semplificazione", come quando si sommano i termini simili o si sottraggono termini uguali da entrambi i membri dell'equazione. Al-jabr venne anche a significare "conciaossa" e quando i Mori trasportarono il termine in Spagna esso divenne algebrista, continuando a conservare quest'ultimo significato. In quel periodo era molto comune in Spagna vedere un'insegna con la scritta "Algebrista y Sangrador" (conciaossa e salassatore) sopra l'ingresso delle botteghe dei barbieri. Anche nell'Italia del XVI secolo la parola "algebra" denotava l'arte di aggiustare le ossa.



Della vita di al-Khowârizmî non si conosce quasi nulla, tranne forse il fatto, come indicato dal nome, che era originario di Khwâ rizm (oggi Khiva), città del Turkestan, entrata a far parte del dominio arabo nel 712. L'algebra di al-Khowârizmî si basa sull'opera di Brahmagupta, ma rivela anche influenze babilonesi e greche. Al-Khowârizmî effettua anche alcune operazioni allo stesso modo di Diofanto, per quanto la sua opera possa considerarsi una regressione rispetto a quella dell'alessandrino, in due aspetti:

- il livello è più elementare rispetto a quello riscontrato nei problemi diofantei
- l'algebra di al-Khowârizmî è tutta retorica, non sincopata come quella di Diofanto

Per questa scelta di un'algebra puramente retorica, l'equazione di secondo grado trattata da al-Khowârizmî suona così: "Un quadrato e dieci delle sue radici sono uguali a nove e trenta dirhems, cioè tu sommi dieci radici a un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta". Noi diciamo più semplicemente: $x^2 + 10x = 39$.

⁴ La Biblioteca di Alessandria fu costruita all'inizio del III sec.a.C. durante il regno di Tolomeo II, anche se è probabile che l'ideazione della biblioteca sia stata opera del padre Tolomeo I, che fece edificare l'annesso tempio delle Muse, il "Museo". Al tempo di Tolomeo III dovevano esistere già due biblioteche. L'effettiva consistenza libraria della biblioteca, come anche il numero degli autori dei libri, è sconosciuta, dato che molti rotoli potevano contenere più opere e molti di questi potevano essere duplicati. Dopo la metà del II secolo, a causa delle complesse vicende interne e dei disordini sociali, la biblioteca persero progressivamente il loro ruolo.

La distruzione della biblioteca è attribuita dalla maggioranza degli storici al tempo del conflitto del 270: nel corso dei feroci scontri ingaggiati nella città di Alessandria l'area del palazzo reale fu completamente distrutta e con essa verosimilmente la biblioteca.

Un episodio, chiaramente aneddotico e poco attendibile, vuole che il generale Amir, incerto su che fare della biblioteca, abbia chiesto un parere al califfo Omar, massima autorità dell'Islam. Il califfo avrebbe risposto: «In quei libri o ci sono cose già presenti nel Corano, o ci sono cose che del Corano non fanno parte: se sono presenti nel Corano sono inutili, se non sono presenti allora sono dannose e vanno distrutte.»

Il racconto è rivestito di leggenda: anche se la biblioteca del Museo fu distrutta realmente dall'estremismo arabo, quella del Serapeo (la seconda più piccola, nel tempio del Serapide) fu distrutta dai cristiani guidati dal vescovo Teofilo.

Come abbiamo visto, al-Khowârizmî definisce l'incognita "radice" o "cosa", dà il prodotto di semplici binomi come $(x\pm a)$ per $(y\pm b)$, mostra come si possano sommare e sottrarre termini da un'espressione della forma ax^2+bx+c , risolve equazioni lineari e quadratiche, ma tenendo distinte sei forme diverse, in modo che i coefficienti siano sempre positivi. Inoltre egli sa che le equazioni di secondo grado possono avere due radici, ma dà soltanto le radici reali positive, che possono tuttavia essere anche irrazionali.

L'opera di al-Khowârizmî si è conservata in un manoscritto arabo del 1342, attualmente a Oxford, e in alcune versioni latine, di cui le più famose sono quella di Roberto di Chester, redatta nel 1145 a Segovia e pubblicata, con traduzione e commento inglese, da L.C.Karpinski nel 1915, e quella di Gherardo da Cremona, scritta a Toledo nel XII secolo.

L'opera latina non contiene alcuna prefazione: nella versione araba al-Khowârizmî tributava lodi al profeta Maometto e ad al-Ma'mûn, che lo aveva invitato a "comporre una breve opera sul calcolo per mezzo (delle regole) di Completamento e Riduzione, limitandosi agli aspetti più facili e utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze e commerci e in tutti gli altri affari umani, o quando si vogliono effettuare misurazioni di terreni, scavi di canali, calcoli geometrici o altre cose del genere".

La traduzione latina dell'Algebra di al-Khowârizmî si apre con una breve formulazione introduttiva del principio del valore posizionale dei numeri; procede poi a trattare, in sei brevi capitoli, la soluzione di sei tipi di equazioni formate da tre specie di quantità: radici, quadrati e numeri.

L'esposizione di al-Khowârizmî era così sistematica ed esauriente che i suoi lettori non dovevano trovare alcuna difficoltà ad impadronirsi delle soluzioni. Probabilmente le sue fonti di ispirazione furono gli indiani, per il sistema di numerazione, la tradizione mesopotamica o siriano-persiana, per il modo di elencare i problemi e per il fatto che alcuni problemi si ripetono, l'ispirazione greca, per la dimostrazione geometrica di alcuni aspetti.

Forse la sopravvivenza dell'Algebra di al-Khowârizmî indica che si trattava di uno dei migliori manuali tipici dell'algebra del tempo, perché in realtà è stato ritrovato anche un manoscritto di epoca contemporanea, o forse anche precedente, di un certo abd-al-Hamid ibn-Turk, che sotto un certo aspetto presenta un'esposizione più completa.

BIBLIOGRAFIA

Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milano, 1980

Silvio Maracchia, *Storia dell'algebra*, Liguori Editore, Napoli, 2005

Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Franco Muzzio Editore, Trento, 2003

Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1991

Piergiorgio Odifreddi, *Il matematico impertinente*, Longanesi & C., Milano, 2005

AA.VV., *Un ponte sul Mediterraneo – Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, ed. Polistama, Firenze, 2002

http://www.arab.it/islam/la_matematica_del_mondo_islamico.htm